

Министерство образования и науки Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра строительной механики

РЕШЕНИЕ ПРИМЕРОВ И ЗАДАЧ ПО ДИНАМИКЕ И УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

*Методические указания к выполнению практических работ
по дисциплинам «Динамика и устойчивость сооружений», «Динамика сооружений»,
«Динамический расчет зданий и сооружений» для студентов специалитета очной формы
обучения направления подготовки 08.05.01 Строительство уникальных зданий
и сооружений и студентов бакалавриата всех форм обучения направления подготовки
08.03.01 Строительство*

© НИУ МГСУ, 2015

Москва 2015

УДК 624.04
ББК 38.112
Р47

С о с т а в и т е л и :
М.И. Ганджунцев, А.А. Петраков

Р47 **Решение** примеров и задач по динамике и устойчивости стержневых систем [Электронный ресурс] : методические указания к выполнению практических работ по дисциплинам «Динамика и устойчивость сооружений», «Динамика сооружений», «Динамический расчет зданий и сооружений» для студентов специалитета очной формы обучения направления подготовки 08.05.01 Строительство уникальных зданий и сооружений и студентов бакалавриата всех форм обучения направления подготовки 08.03.01 Строительство / М-во образования и науки Рос. Федерации, Нац. исследоват. Моск. гос. строит. ун-т, каф. строительной механики; сост.: М.И. Ганджунцев, А.А. Петраков. — Электрон. дан. и прогр. (1,43 МБ). — Москва : НИУ МГСУ, 2015. — Учебное сетевое электронное издание — Режим доступа: http://lib.mgsu.ru/Scripts/irbis64r_91/cgiirbis_64.exe?C21COM=F&I21DBN=IBIS&P21DBN=IBIS — Загл. с титул. экрана.

Рассмотрены наиболее характерные задачи расчета стержневых систем на динамические воздействия и устойчивость, приведены их подробные решения с кратким изложением теоретических основ.

Для студентов специалитета очной формы обучения направления подготовки 08.05.01 Строительство уникальных зданий и сооружений и студентов бакалавриата всех форм обучения направления подготовки 08.03.01 Строительство.

Учебное сетевое электронное издание

© НИУ МГСУ, 2015

Отв. за выпуск — кафедра строительной механики

Подписано к использованию 14.10.2015 г. Уч.-изд. л. 2,93. Объем данных 1,43 МБ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Московский государственный
строительный университет» (НИУ МГСУ).
129337, Москва, Ярославское ш., 26.
Издательство МИСИ – МГСУ.
Тел. (495) 287-49-14, вн. 13-71, (499) 188-29-75, (499) 183-97-95.
E-mail: ric@mgsu.ru, rio@mgsu.ru

Основы динамики стержневых систем

1. Общие сведения о динамических расчетах конструкций

Динамика сооружений занимается разработкой принципов и методов расчета сооружений на действие динамических нагрузок.

При динамическом расчете определяется не только динамическая прочность сооружений, но и динамические перемещения, ускорения и скорости, которые, воздействуя на людей и точные приборы не должны превышать допустимых пределов.

В процессе эксплуатации сооружения подвергаются различного рода динамическим воздействиям, которые разделяются на следующие основные виды:

а. Вибрационная нагрузка - периодические вибрационные воздействия от движения неуравновешенных частей машин и механизмов, например, электромоторов, ткацких станков и др. Нагрузки этого вида почти не зависят от свойств конструкций, на которые они действуют, но являются основным источником колебаний этих конструкций.

б. Ударная нагрузка, создаваемая падающими частями механизмов (молотов, копров и др.). Эти нагрузки характеризуются небольшой продолжительностью их действия. Максимальная величина нагрузки и время ее действия зависят от упругих и инерционных свойств конструкций, воспринимающих удар.

в. Подвижная нагрузка, положение которой изменяется во времени, например: нагрузка от подвижного состава железных дорог, от кранов и т. п;

г. Действие взрыва, вызывающего резкое изменение давления на поверхность сооружения.

д. Сейсмические воздействия на здания или сооружения, вызывающие перемещения основания, изменяющиеся во времени по сложному закону - сейсмограмме и как следствие вызывающие колебания сооружения. Параметры сейсмического воздействия невозможно точно задать заранее. Такие воздействия рассматриваются как случайные величины или случайные функции, и расчет на их воздействие производится с привлечением не только методов динамики сооружений, но также и методов теории вероятности.

е. Ветровая.

Степень свободы в динамике сооружений

Количество независимых геометрических параметров определяющих положение колеблющихся масс системы в любой момент времени, называется числом степеней свободы этой системы. Число степеней свободы удобно определять, как число связей, которые надо наложить на систему, чтобы массы оставались в покое.

Число степеней свободы зависит от вида расчетной модели, с помощью которой схематизируется реальная конструкция. Для упрощения расчетов часто считается, что масса стержня сосредоточена в одной или нескольких его точках.

Так, например, невесомая балка с одной точечной массой имеет одну степень свободы, так как положение этой массы определяется только одним параметром – ее прогибом.

Рама с двумя сосредоточенными массами, показанная на рис. 1, имеет три

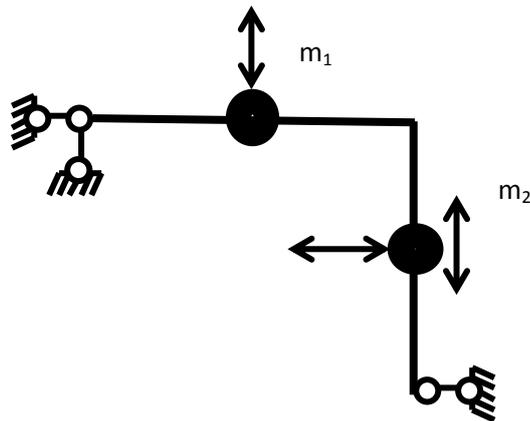


Рис. 1

степени свободы, так как положение первой массы характеризуется двумя ее перемещениями - горизонтальным и вертикальным, а положение второй массы характеризуется только ее горизонтальным перемещением.

Для того чтобы определить положение всех точек стержня имеющего распределенную массу, необходимо задание бесконечно большого числа перемещений. Поэтому такие элементы рассматриваются как системы с бесконечным числом степеней свободы.

Способы решения задач динамики сооружений.

Статический способ основан на применении уравнений динамического равновесия, которые, в отличие от уравнений статического равновесия учитывают возникающие при колебаниях силы инерции равные, согласно принципу Даламбера, произведению массы на ускорение.

Энергетический способ, основан на применении закона сохранения энергии, согласно которому сумма потенциальной и кинетической энергий упругой системы является величиной, постоянной во времени..

2. Свободные колебания системы с одной степенью свободы

Рассмотрим систему с одной степенью свободы в виде невесомой балки, несущей точечную массу (рис. 2). Под действием силы веса, равной произведению массы на величину ускорения свободного падения ($Q = mg$) точка её приложения переместится вниз на величину $U_{ст}$. Упругая линия балки от статической силы веса изображена пунктирной кривой линией. Чтобы исключить из рассмотрения силу веса, уравновешивающуюся начальной силой реакции системы, отсчет перемещений ведется от этой линии. Если эту балку в результате внешнего взаимодействия вывести из состояния равновесия, то после прекращения указанного взаимодействия система будет совершать свободные колебания около положения статического равновесия.

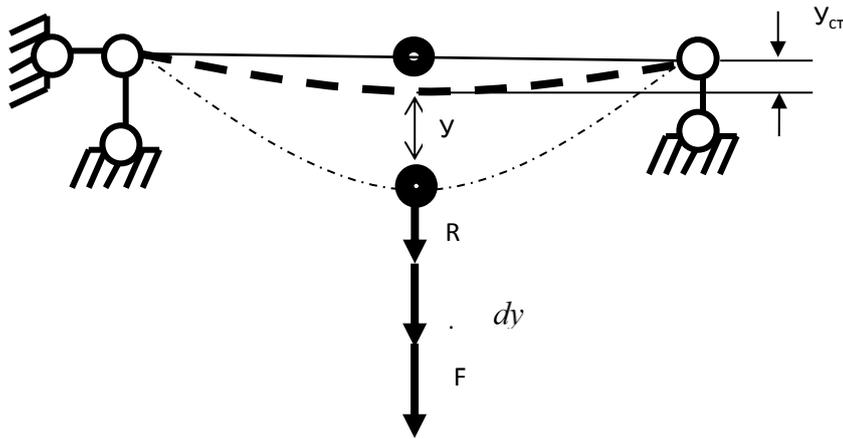


Рис. 2

Для составления уравнения движения воспользуемся принципом Даламбера. При свободных колебаниях балки на массу, отклонившуюся от положения статического равновесия на величину y , будут действовать восстанавливающая сила R , сила сопротивления F и сила инерции J .

Рассмотрим каждую из этих сил, считая положительными силы и перемещения, направленные вниз.

Восстанавливающая сила R - это реакция системы, возникающая при отклонении массы от положения статического равновесия, и стремящаяся вернуть массу в положение статического равновесия. Эта реактивная сила равна произведению величины отклонения y точки, в которой сосредоточена масса, на жесткость системы

$$R = -\gamma y \quad (1)$$

и направлена в сторону, противоположную перемещению, следовательно, отрицательна.

В соответствии с гипотезой вязкого сопротивления Фойгта сила сопротивления F прямо пропорциональна скорости движения массы и направлена в противоположную сторону перемещения (рис.2):

$$F = -k \frac{dy}{dt} \quad (2)$$

Здесь k - коэффициент пропорциональности.

Для определения жесткости системы необходимо определить реакцию балки в

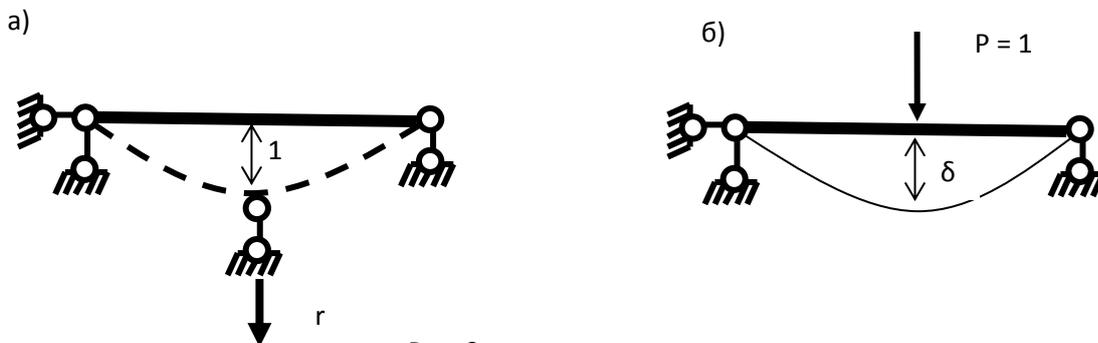


Рис. 3

рассматриваемой точки при перемещении этой точки, равном единице (рис. 3а).

Иногда удобнее пользоваться податливостью системы $\delta = 1/r$. Для определения податливости необходимо вначале рассчитать систему (рис. 3б) на действие единичной силы, приложенной по направлению колебаний массы. Затем по обычным правилам определения перемещений с помощью формулы Мора могут быть вычислены значения δ , и $r = 1/\delta$.

Уравнение динамического равновесия всех сил, действующих на массу,

$$R + J + F = 0. \quad (3)$$

Подставляя вместо сил R и J F их выражения, получим

$$-m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} - k \cdot \frac{dy}{dt} - r \cdot y = 0. \quad (4)$$

Решение этого уравнения:

$$y = A_0 e^{-nt} (\sin \varphi_0 \cos \omega_0 t + \cos \varphi_0 \sin \omega_0 t) = A_0 e^{-nt} \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (5)$$

Начальная амплитуда свободных колебаний равна

$$A_0 = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0 + y_0 n}{\omega_0} \right)^2} \quad (6)$$

где y_0 – начальное смещение массы, v_0 – ее начальная скорость.

Круговая частота свободных колебаний равна

$$\omega_0 = \sqrt{n^2 + \omega^2}, \quad (7)$$

где $n = k/2m$ – коэффициент затухания, $\omega = \sqrt{\frac{r}{m}} = \sqrt{\frac{1}{\delta m}}$ (8)

Начальная фаза свободных колебаний φ_0 :

$$\varphi_0 = \arctg (y_0 \omega_0 / (v_0 + y_0 n))$$

Построим график свободных затухающих колебаний (рис. 4) по уравнению (5). Значения перемещений будут ограничены кривыми: $y = \pm A_0 e^{-nt}$.

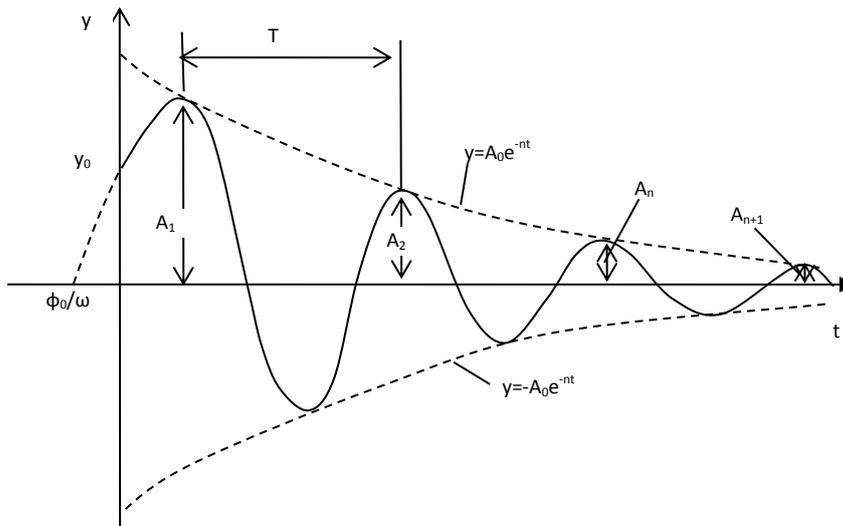


Рис. 4

Амплитуда колебаний переменна и изменяется по монотонно снижающейся кривой; в качестве характеристики затухания применяется логарифмический декремент затухания δ , вычисляемый по формуле

$$\delta = \ln \left(\frac{A_n}{A_{n+1}} \right) = \ln \frac{e^{-nt_n}}{e^{-nt_{n+1}}} = \ln e^{n(t_{n+1}-t_n)} = \ln e^{nT} = nT. \quad (9)$$

Равенство (8) используется для экспериментального определения логарифмического декремента колебаний и коэффициента затухания.

Если по условиям задачи силой сопротивления можно пренебречь, то в формулах (5) – (9) следует положить $n = 0$. Получим:

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0); \quad (10)$$

$$A = \sqrt{y_0^2 + (v_0/\omega)^2}; \quad (11)$$

$$\varphi_0 = \arctg(y_0\omega/v_0). \quad (12)$$

График свободных колебаний при отсутствии затухания показан на рис.5

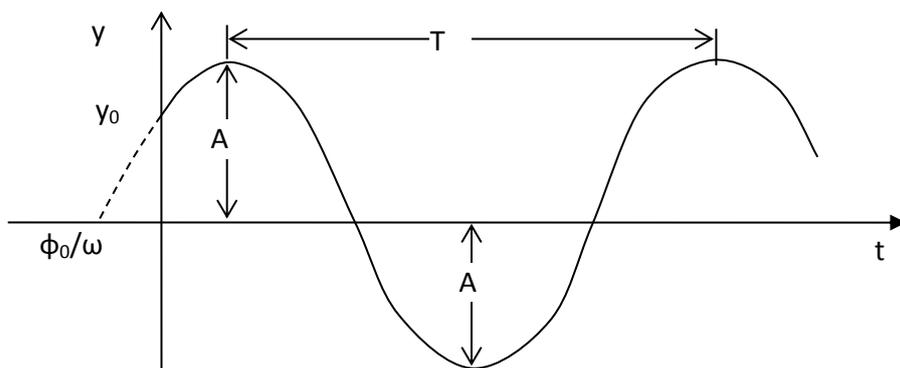


Рис. 5

Продолжительность полного цикла колебаний называется периодом и выражается формулой:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (13)$$

Пример 1

Требуется определить круговую частоту собственных колебаний массы m , расположенной на середине ригеля (рис. 6). Собственный вес не учитывается.

а)

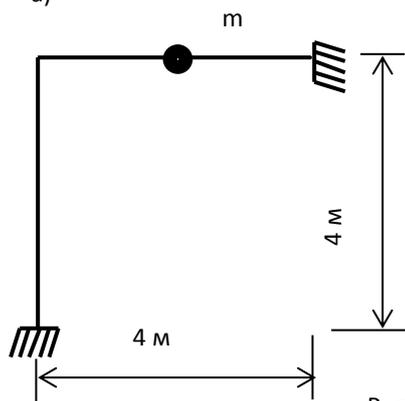


Рис. 6

Для нахождения круговой частоты собственных колебаний по формуле (8) необходимо определить податливость системы. Для этого надо построить эпюру от единичной сосредоточенной силы, приложенной в точке расположения массы по направлению возможного перемещения. Заданная рама статически неопределима и для построения эпюры изгибающих моментов на действие единичной силы проще всего применить метод перемещений. Приведем окончательную эпюру, опуская стандартную процедуру метода (рис. 7а)

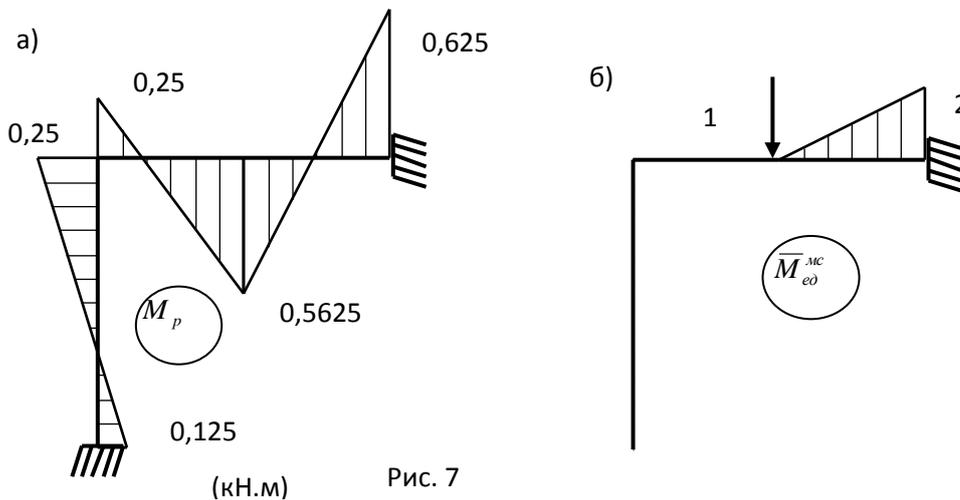


Рис. 7

Для упрощения расчетов построим еще одну эпюру изгибающих моментов от единичной сосредоточенной силы в любой основной системе метода сил. Заданная система три раза статически неопределима, и для получения статически определимой системы проще всего отбросить заделку снизу. В этом случае эпюра будет только на ригеле (рис. 7б).

Коэффициент податливости δ системы определяется по формуле:

$$\delta = \sum \int \frac{\overline{M}_p^2 ds}{EJ} = \sum \int \frac{\overline{M}_p \overline{M}^{mc}_{eo} ds}{EJ} = \frac{2}{6EJ} (2 \cdot 2 \cdot 0,625 - 0,5625 \cdot 2) = \frac{0,4583}{EJ}.$$

По формуле (2) найдем частоту собственных колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta m}} = \sqrt{\frac{EJ}{0,45833 \cdot m}} = 1,477 \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

3. Свободные колебания системы с конечным числом степеней свободы

Свободные колебания системы с конечным числом степеней свободы рассмотрим на примере невесомой балки с двумя точечными массами (рис. 8). Составим уравнения движения для этой дискретной системы, совершающей свободные колебания. Предположим, что массы получили некоторые начальные скорости и перемещения, после чего балка совершает свободные колебания, характеризующиеся независимыми перемещениями масс y_1 и y_2 .

При колебаниях на систему будут действовать инерционные силы J_1 и J_2 , приложенные к каждой массе по направлению возможных перемещений $J_1 = -m_1 \cdot \frac{d^2 y_1}{dt^2}$, $J_2 = -m_2 \cdot \frac{d^2 y_2}{dt^2}$. Перемещение первой массы y_1 может быть получено, используя принцип независимости действия сил.

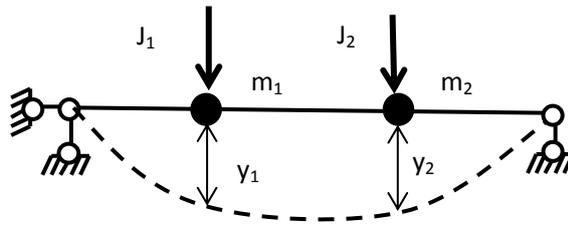


Рис. 8

$$y_1 = \delta_{11} J_1 + \delta_{12} J_2 = -\delta_{11} m_1 \cdot \frac{d^2 y_1}{dt^2} - \delta_{12} m_2 \cdot \frac{d^2 y_2}{dt^2}.$$

Перемещения δ_{11} и δ_{12} вычисляются от единичных сил, приложенных в точках приложения инерционных сил. Аналогично определяется перемещение второй массы.

$$y_2 = \delta_{21} J_1 + \delta_{22} J_2 = -\delta_{21} m_1 \cdot \frac{d^2 y_1}{dt^2} - \delta_{22} m_2 \cdot \frac{d^2 y_2}{dt^2}.$$

Полученные уравнения являются однородными дифференциальными уравнениями, описывающими свободные колебания системы с двумя степенями свободы. Общее решение однородной системы дифференциальных уравнений можно искать в виде:

$$y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_0),$$

Здесь A_1 и A_2 – амплитуды колебаний соответствующих масс, ω – частота собственных колебаний, φ_0 , – начальная фаза колебаний.

Подставляя это решение в систему дифференциальных уравнений и сократив на $\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$, получим:

$$(\delta_{11} m_1 - \frac{1}{\omega^2}) A_1 + \delta_{12} m_2 A_2 = 0,$$

$$\delta_{21} m_1 A_1 + (\delta_{22} m_2 - \frac{1}{\omega^2}) A_2 = 0. \quad (14)$$

Тривиальное решение систему уравнений (8) состоит в равенстве нулю амплитуд колебаний $A_1 = A_2 = 0$, что означает отсутствие колебаний.

Для того, чтобы однородная система линейных уравнений имела не- нулевое решение, необходимо, чтобы детерминант системы (8) был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (\delta_{11} m_1 - \frac{1}{\omega^2}) & \delta_{12} m_2 \\ \delta_{21} m_1 & (\delta_{22} m_2 - \frac{1}{\omega^2}) \end{vmatrix} = 0. \quad (15)$$

Полученный определитель носит название характеристического или же **векового уравнения**.

Раскрыв определитель (15), получим алгебраическое уравнение второй степени относительно $\frac{1}{\omega^2}$. Два корня этого уравнения будут положительными и не равными нулю, а сами частоты действительными. Совокупность частот собственных колебаний системы называется её спектром собственных частот. Наименьшая частота называется основной частотой или **обертоном**.

Свободные периодические колебания, совершаемые по гармоническому закону (по закону синуса) с одной частотой, называются собственными, а формы, им соответствующие, – собственными или главными формами

Каждой частоте собственных колебаний соответствует своя форма свободных колебаний, для определения которых надо подставить найденную частоту собственных колебаний в систему (14). Так как эта система однородная, то из нее можно найти лишь соотношение между амплитудами колебания масс. Из двух уравнений системы можно использовать любое. Обычно одну из амплитуд приравнивают к единице.

В общем случае для системы с n степенями свободы получаем систему n уравнений (15) и соответственно определитель n степени из которого получаем n частот собственных колебаний. Для определения форм колебаний используют любые $(n - 1)$ уравнений системы (14).

Формы собственных колебаний обладают свойством ортогональности

$$\sum_{i=1}^n m_i A_i^k A_i^l = 0. \quad (16)$$

Пример 2

Определить частоты собственных колебаний невесомой рамы, изображенной на рис. 9.а.

Система имеет две сосредоточенные массы. Масса m может совершать колебания по вертикали и по горизонтали. Вторая масса $2m$ может перемещаться только по вертикали, так как горизонтальному перемещению мешает горизонтальная шарнирно-подвижная опора. Рама имеет две динамические степени свободы потому, что и первая и вторая масса по вертикали могут перемещаться только вместе.

На рис. 9 б показаны инерционные силы. Инерционная вертикальная сила возникает от колебания первой и второй масс, поэтому $m_1=3m$. Горизонтальная инерционная сила приложена только к одной массе, $m_2=m$.

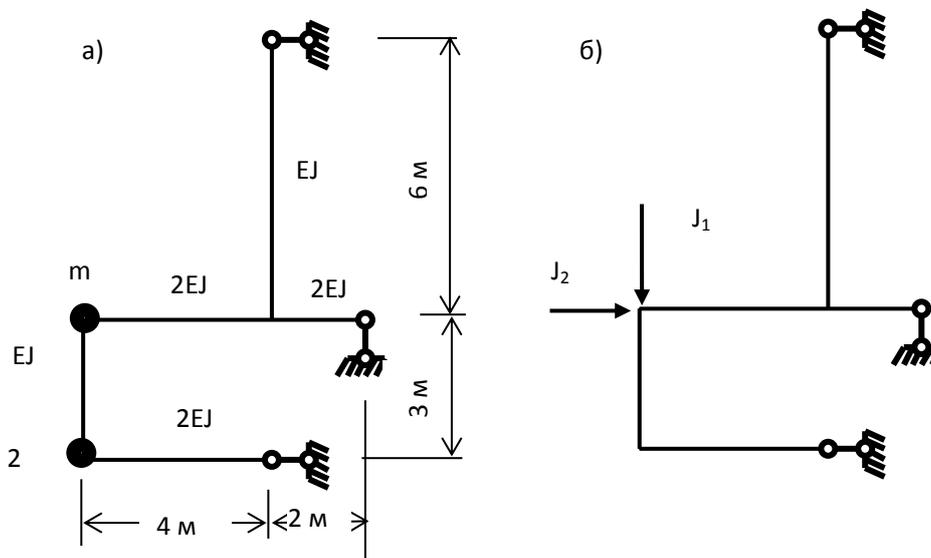


Рис. 9

поэтому

Построим эпюры изгибающих моментов от единичных сил инерции

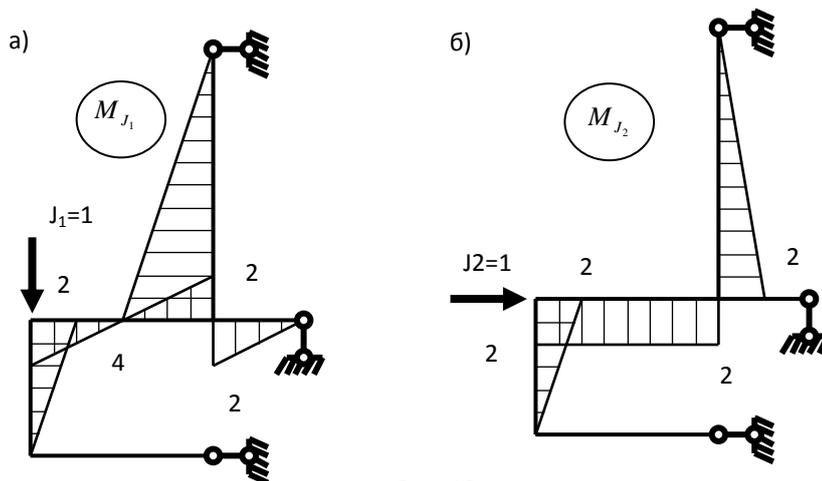


Рис. 10

(рис.10).

Для вычисления перемещения δ_{11} умножаем эпюру M_1 саму на себя.

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1^2}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} \left(\frac{2 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{4 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) + \frac{1}{2EJ} \cdot 3 \cdot \left(\frac{2 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = \frac{40}{EJ}$$

Для вычисления перемещения δ_{22} умножаем эпюру M_2 саму на себя.

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{M_2^2}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} \left(\left(\frac{2 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) + \left(\frac{2 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) \right) + \frac{1}{2EJ} (2 \cdot 4 \cdot 2) = \frac{20}{EJ}$$

Для вычисления перемещения δ_{12} умножаем эпюру M_2 на M_1 .

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{M_1 \cdot M_2}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} \left(\left(\frac{2 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) - \left(\frac{2 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) \right) = -\frac{12}{EJ}$$

Частоты свободных колебаний.

Частоты свободных колебаний определяются из векового уравнения:

$$\begin{vmatrix} \left(\delta_{11} m_1 - \frac{1}{\omega^2} \right) & \delta_{12} m_2 \\ \delta_{21} m_1 & \left(\delta_{22} m_2 - \frac{1}{\omega^2} \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Подставив значения перемещений и масс, получим:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{40}{EJ} \cdot 3m - \frac{1}{\omega^2} \right) & -\frac{12}{EJ} m \\ -\frac{12}{EJ} \cdot 3m & \left(\frac{20}{EJ} m - \frac{1}{\omega^2} \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получим алгебраическое уравнение второй степени относительно $\frac{1}{\omega^2}$.

$$\frac{1}{\omega^4} - \frac{140 \cdot m}{EJ} \cdot \frac{1}{\omega^2} + \frac{1968 \cdot m^2}{(EJ)^2} = 0.$$

Два корня этого уравнения будут положительными и не равными нулю:

$$\frac{1}{\omega_1^2} = 124,1 \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad \frac{1}{\omega_2^2} = 15,85 \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Отсюда частоты собственных колебаний будут равны:

$$\omega_1 = 0,089749127 \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad \omega_2 = 0,251163902 \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Для проверки найденных частот определим формы колебания. Для этого подставляем найденные частоты собственных колебаний в уравнение:

$$(\delta_{11} m_1 - \frac{1}{\omega^2}) A_1 + \delta_{12} m_2 A_2 = 0,$$

для первой частоты $\omega_1 = 0,089749127 \sqrt{\frac{EJ}{m}}$, получим:

$$(\frac{120}{EJ} m - \frac{124,1}{EJ} m) A_1 - \frac{12}{EJ} m A_2 = 0,$$

Приравняем вторую амплитуду к единице $A_2^1 = 1$, тогда первая амплитуда из уравнения будет равна: $A_1^1 = -2,893$

для второй частоты $\omega_2 = 0,251163902 \sqrt{\frac{EJ}{m}}$:

$$(\frac{120}{EJ} m - \frac{15,85}{EJ} m) A_1 - \frac{12}{EJ} m A_2 = 0,$$

или $A_2^2 = 1$, а первая амплитуда из уравнения будет равна: $A_1^2 = 0,1152$.

Проверим ортогональность форм колебаний, подставив найденные амплитуды в уравнение (16):

$$\sum_{i=1}^n m_i A_i^k A_i^l = 0. \quad -2,893 \cdot 0,1152 \cdot 3m - 1 \cdot 1 \cdot m = -0,99982m + 1m = 0,00018m$$

Относительная точность расчетов равна $\frac{0,00018}{1} 100\% = 0,018\%$.

4. Энергетический способ определения частоты собственных колебаний системы

По закону сохранения энергии сумма потенциальной (U) и кинетической (K) энергии колеблющейся системы является постоянной величиной

$$U+K = \text{const.}$$

При колебаниях происходит переход энергии одного вида в энергию другого вида.

В момент наибольшего отклонения массы (рис.11) от положения

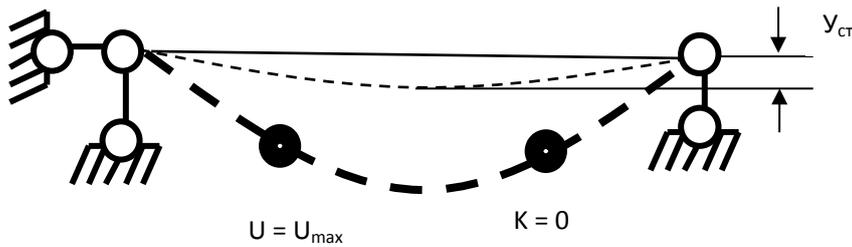


Рис. 11

статического

равновесия потенциальная энергия достигает наибольшего значения U_{\max} , а скорость, а значит и кинетическая энергия убывает до нуля.

В момент перехода массы через положение статического равновесия (рис.12) потенциальная энергия равна нулю (при этом считается, что потенциальная энергия масс в положении статического равновесия до колебания была равна нулю), а кинетическая энергия достигает своего максимального значения K_{\max} .

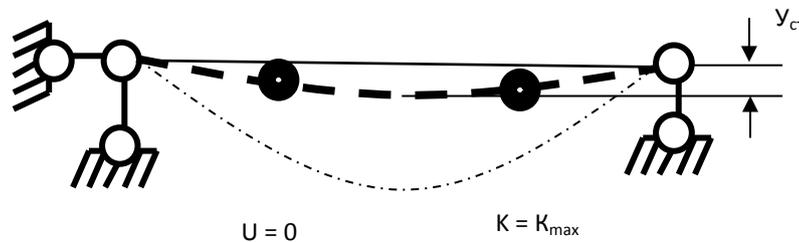


Рис. 12

Так как сумма энергий постоянна то

$$U_{\max} + 0 = 0 + K_{\max},$$

или

$$U_{\max} = K_{\max}$$

Для определения потенциальной и кинетической энергий необходимо знать перемещения масс при колебаниях, которые заранее не известны. Для приближенного решения задачи можно задать динамические прогибы так, что бы они удовлетворяли граничным условиям, например, уравнением изогнутой оси стержня под действием на него статической нагрузки,

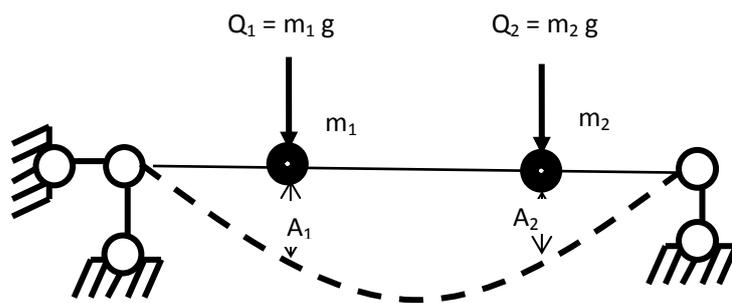


Рис. 13

(рис. 13).

Потенциальную энергию деформации изгиба стержня с сосредоточенными массами можно выразить через работу внешних сил $Q_i = m_i g$ на перемещениях A_i .

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \sum_1^n m_i g \cdot A_i = \frac{g}{2} \sum_1^n m_i A_i.$$

Здесь n – количество масс, A_i – максимальные перемещения масс.

Кинетическая энергия системы с сосредоточенными массами равна

$$K_{\max} = \frac{1}{2} \sum_1^n m_i \cdot V_{i \max}^2.$$

Где $V_{i \max}^2$ – максимальная скорость масс.

Для определения скорости масс будем считать, что колебания происходят по гармоническому закону :

$$y = A_i \sin \omega t.$$

Тогда скорость масс будет равна

$$V_i = \frac{dy_i}{dt} = A_i \omega \cos \omega t.$$

Максимальная скорость будет, $V_{\max} = A_i \omega$. Максимальная кинетическая энергия в этом случае равняется

$$K_{\max} = \frac{1}{2} \sum_1^n m_i \cdot A_i^2 \cdot \omega^2.$$

Приравняв максимальную кинетическую энергию к максимальной потенциальной энергии системы, получим формулу для определения круговой частоты собственных колебаний

$$\omega = \sqrt{g \frac{\sum_{i=1}^n m_i A_i}{\sum_{i=1}^n m_i A_i^2}}. \quad (17)$$

Из этой формулы видно, что для определения минимальной круговой частоты собственных колебаний нужно, чтобы перемещения масс A_i были максимальными.

5. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы без учета затухания

Рассмотрим вынужденные колебания от действия гармонической нагрузки. Рассмотрим систему с одной степенью свободы в виде невесомой вертикальной консоли, с точечной массой на конце консоли (рис. 14). При вынужденных колебаниях системы на массу, отклонившуюся от положения статического равновесия на величину y , будут действовать восстанавливающая сила R , сила инерции J и внешняя сила $P(t)=P\sin\theta t$. Здесь P - амплитуда гармонической нагрузки, а θ - круговая частота вынуждающей нагрузки.

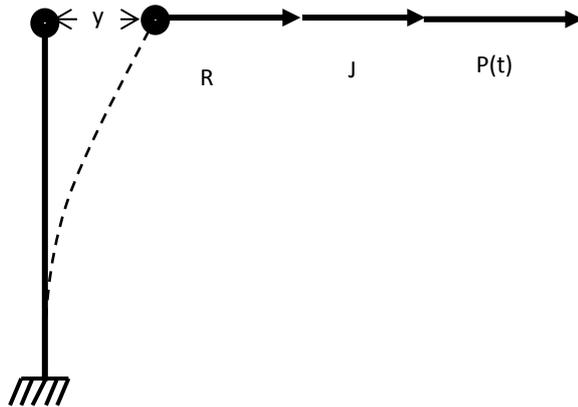


Рис. 14

Уравнение динамического равновесия всех сил, действующих на массу, на ось y будет равно

$$R + J + P(t) = 0.$$

Подставляя вместо сил R и J их выражения, получим

$$-m \times \frac{d^2 y}{dt^2} - r \times y + P(t) = 0.$$

Разделив уравнение на массу m , и поменяв знак, получаем неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = \frac{P}{m} \sin \theta t, \quad (18)$$

Здесь:

$$\omega = \sqrt{\frac{r}{m}} = \sqrt{\frac{1}{\delta m}} \quad (19)$$

Решение неоднородного уравнения (18) состоит из общего решения соответствующего однородного уравнения

$$y_0 = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

и частного решения неоднородного уравнения

Частное решение можно представить в виде:

$$y_{\text{ч}} = A_1 \sin \theta t.$$

Для определения постоянной A_1 подставим частное решение в дифференциальное уравнение (18):

$$-A_1 \theta^2 \sin \theta t + A_1 \omega^2 \sin \theta t = P/m \sin \theta t.$$

Отсюда получим:

$$A_1 = \frac{P}{m(\omega^2 - \theta^2)} = \frac{P}{m \cdot \omega^2 (1 - \nu^2)}, \text{ где } \nu = \frac{\theta}{\omega}.$$

Подставим в это выражение круговую частоту собственных колебаний по формуле (19)

Тогда получим:

$$A_1 = \frac{P}{m \cdot \frac{r}{m} (1 - \nu^2)} = \frac{y_{\text{ст}}}{(1 - \nu^2)} = y_{\text{ст}} \mu. \quad (20)$$

Здесь $y_{\text{ст}}$ – перемещение массы от статического действия амплитудного значения внешней динамической нагрузки, μ – динамический коэффициент, равный:

$$\mu = \frac{1}{1 - \nu^2}. \quad (21)$$

Динамический коэффициент показывает, во сколько раз динамическое действие нагрузки превышает статическое действие её амплитудного значения.

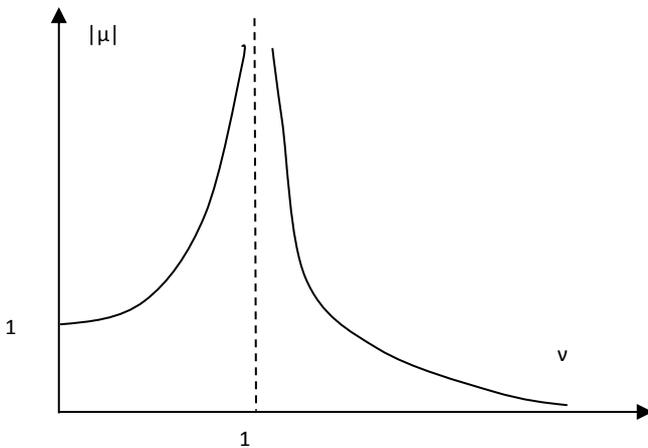


Рис. 15

При равенстве частоты вынуждающей нагрузки и частоты собственных колебаний ($\nu=1$) наступает резонанс. В этом случае амплитуда колебаний будет возрастает до бесконечности.

График изменения динамического коэффициента показан на рисунке 15.

6. Вынужденные колебания системы с конечным числом степеней свободы

Вынужденные колебания системы с конечным числом степеней свободы рассмотрим на примере невесомой балки с двумя точечными массами (рис. 16).

При колебаниях на систему будут действовать внешние динамические силы и инерционные силы J_1 и J_2 приложенные к каждой массе по направлению возмож-

ных перемещений $J_1 = -m_1 \cdot \frac{d^2 y_1}{dt^2}$, $J_2 = -m_2 \cdot \frac{d^2 y_2}{dt^2}$. Перемещения каждой из масс слагаются из перемещений, вызванных всеми инерционными силами и нагрузкой, и будут равны:

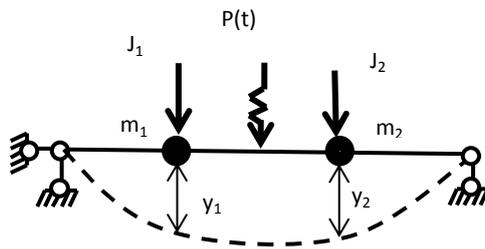


Рис. 16

$$\begin{cases} y_1(t) = \delta_{11} \cdot J_1(t) + \delta_{12} \cdot J_2(t) + \Delta_{1p}(t), \\ y_2(t) = \delta_{21} \cdot J_1(t) + \delta_{22} \cdot J_2(t) + \Delta_{2p}(t). \end{cases} \quad (22)$$

Где δ_{ik} – перемещение массы m_i , вызванное статически приложенной инерционной силой $J_k=1$,

$\Delta_{ip}(t)$ - перемещение массы m_i , вызванное динамической нагрузкой $P(t)$. При гармонической нагрузке $P(t)=P\sin\theta t$ перемещение массы также будет изменяться по гармоническому закону:

$$\Delta_{ip}(t) = \Delta_{ip} \sin\theta t.$$

Здесь Δ_{ip} - значение перемещения массы m_i , при действии статически приложенной нагрузки $P(t)$, равной амплитудному значению вибрационной нагрузки.

После подстановки в систему уравнений (22) значений сил инерции получим систему неоднородных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot m_1 \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} + \delta_{12} \cdot m_2 \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} + y_1(t) - \Delta_{1p}(t) = 0, \\ \delta_{21} \cdot m_1 \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} + \delta_{22} \cdot m_2 \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} + y_2(t) - \Delta_{2p}(t) = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Частное решение неоднородной системы дифференциальных уравнений(24) для установившихся колебаний будет:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= A_1 \sin\theta t, \\ y_2(t) &= A_2 \sin\theta t, \end{aligned} \quad (24)$$

Подставим (25) в систему (24), сократив все члены на $\sin\theta t$, выразим амплитудные значения перемещений A_i через амплитудные значения инерционных сил J_i и тогда получим систему канонических уравнений метода сил для определения амплитудных значений инерционных сил:

$$\begin{cases} \delta_{11}^* \cdot J_1 + \delta_{12} \cdot J_2 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{21} \cdot J_1 + \delta_{22}^* \cdot J_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{cases} \quad (25)$$

$$\text{где } \delta_{ii}^* = \delta_{ii} - \frac{1}{m_i \theta^2}.$$

После нахождения амплитудных значений сил инерции J_i из решения системы уравнений (25) эпюра динамических изгибающих моментов может быть построена путем сложения единичных эпюр от инерционных сил, предварительно умноженных на значения J_i с эпюрой от амплитудных значений нагрузки

$$M_{\text{дин}} = M_1 J_1 + M_2 J_2 + M_p \quad (26)$$

Пример 3.

Для системы, изображенной на рис. 17 построить динамическую эпюру моментов ($\theta = 0,9 \omega_{\min}$).

В примере 2 для данной рамы определены частоты собственных колебаний

$$\omega_1 = 0,089749127 \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad \omega_2 = 0,251163902 \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Вычисляем частоту вынуждающей нагрузки:

$$\theta = 0,9 \omega_{\min} = 0,9 \cdot 0,089749127 \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 0,0808 \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Перемещения δ_{ij} ранее были определены в примере 2:

$$\delta_{11} = \frac{40}{EJ}, \quad \delta_{22} = \frac{20}{EJ}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{12}{EJ}.$$

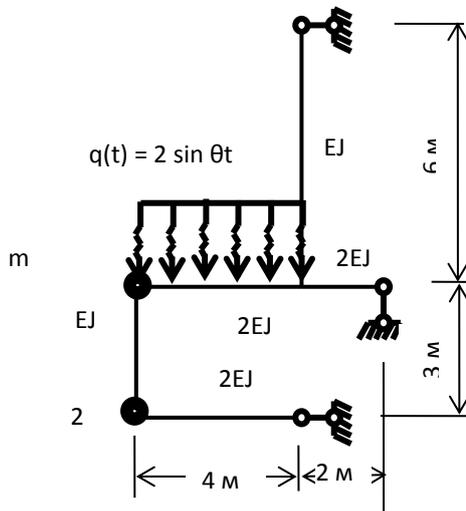


Рис. 17

Найдем значения δ_{ii}^* :

$$\delta_{11}^* = \frac{40}{EJ} - \frac{1}{3m \cdot 0,0808^2 \frac{EJ}{m}} = -\frac{11,09}{EJ},$$

$$\delta_{22}^* = \frac{20}{EJ} - \frac{1}{m \cdot 0,0808^2 \frac{EJ}{m}} = -\frac{133,27}{EJ}.$$

Построим эпюру моментов от амплитудного значения динамической

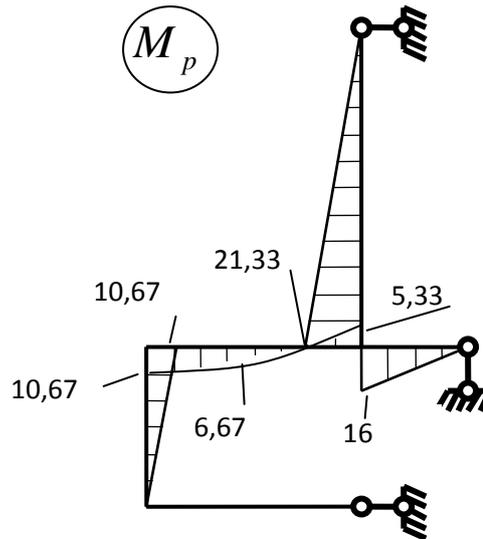


Рис 18

нагрузки (рис.18).

Определяем грузовые коэффициенты.

Перемножаем эпюру M_1 (построена в примере 2) на грузовую эпюру:

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{M_1 \cdot M_p}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} \left[\frac{2 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 10,67 + \frac{4}{6 \cdot 2} (2 \cdot 10,67 + 2 \cdot 5,33) + \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 16 + \frac{4 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 21,33 \right] = \frac{213,3}{EJ}.$$

Перемножаем эпюру M_2 (построена в примере 2) на грузовую эпюру:

$$\Delta_{2p} = \sum \int \frac{M_2 \cdot M_p}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} \left[\frac{2 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 10,67 + \frac{4}{6 \cdot 2} (2 \cdot 10,67 + 4 \cdot 2 \cdot 6,67 - 2 \cdot 5,33) - \frac{2 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 21,33 \right] = -\frac{42,6}{EJ}.$$

Подставляем найденные коэффициенты в канонические уравнения метода сил:

$$\begin{cases} -\frac{11,09}{EJ} \cdot J_1 - \frac{12}{EJ} \cdot J_2 + \frac{213,3}{EJ} = 0, \\ -\frac{12}{EJ} \cdot J_1 - \frac{133,27}{EJ} \cdot J_2 - \frac{42,6}{EJ} = 0. \end{cases}$$

Решив уравнение, получим:

$$J_1 = 21,7, \quad J_2 = -2,27.$$

Динамическая эпюра моментов показана на рис.19.

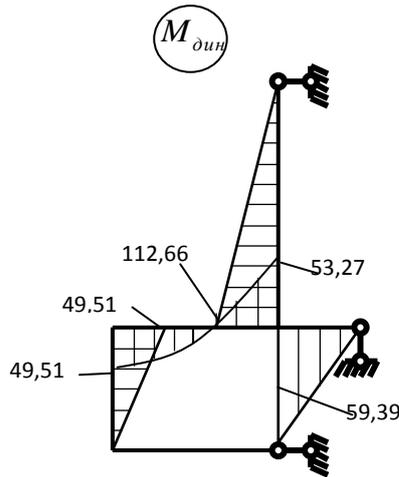


Рис. 19

Использование симметрии при динамическом расчете рам

В симметричных рамах с симметрично расположенными массами свободные колебания могут иметь симметричную и обратно симметричную форму колебаний, соответственно этому перемещения и силы инерции масс так же будут симметричными и обратно симметричными. Для разделения форм колебаний следует производить группировку сил инерции и перемещений. При этом перемещения следует вычислять от парных симметричных или обратно симметричных единичных сил. Поскольку исходные эпюры моментов от единичных парных сил будут симметричные и обратно симметричные, то соответствующие побочные перемещения, связывающие симметричные и обратно симметричные силы инерции, будут обращаться в нуль. Поэтому группировка приводит к распаду системы уравнений на две независимые системы - одна с симметричными силами инерции, другая с обратно симметричными. Из первой системы уравнения получим вековое уравнение для определения частот симметричных форм колебаний, из второй - вековое уравнение для определения частот обратно симметричных форм колебаний.

Так как групповые перемещения находятся от парных единичных сил, то соответствующие групповые массы должны входить в уравнение перемещений, и в соответствующие вековые уравнения с коэффициентом 0,5. Иначе говоря, можно считать, что одна из каждой половины масс является носителем симметричных сил инерции, другая - обратно симметричных.

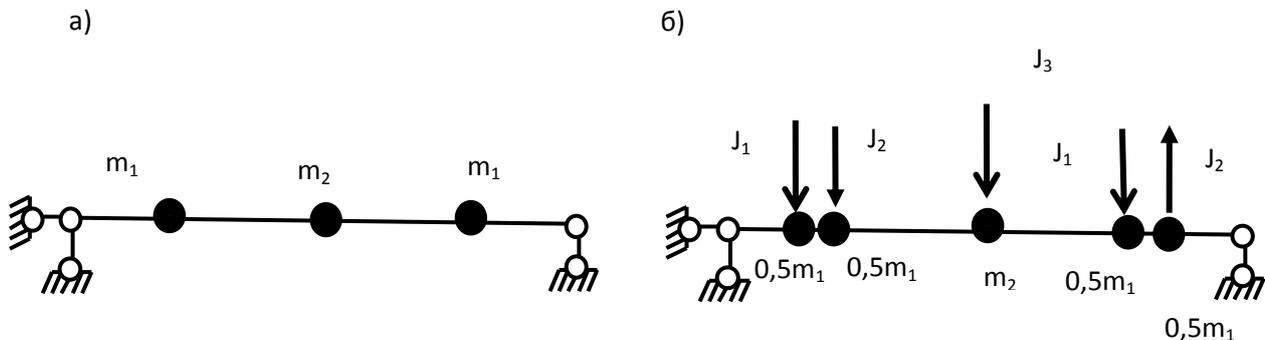


Рис. 20

Поясним изложенное выше на примере симметричной рамы с тремя степенями сво-

боды (рис: 20 а). Для симметрично расположенных масс m_1 , проведем группировку неизвестных сил инерции, и расчетную схему будем иметь в виде, представленном на рис. 20 б.

Уравнения перемещений свободных колебаний по методу сил для рамы будут:

$$\begin{cases} (\delta_{11} - \frac{1}{0,5m_1\omega^2}) \cdot J_1 + \delta_{12} \cdot J_2 + \delta_{13} \cdot J_3 = 0, \\ \delta_{21} \cdot J_1 + (\delta_{22} - \frac{1}{0,5m_1\omega^2} \cdot J_2) + \delta_{23} \cdot J_3 = 0, \\ \delta_{31} \cdot J_1 + \delta_{32} \cdot J_2 + (\delta_{33} - \frac{1}{m_2\omega^2} \cdot J_3) = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Так как силы инерции J_1 и J_3 симметричные, то им будут соответствовать симметричные эпюры моментов, инерционной силе же J_2 обратно симметричная эпюра моментов, перемещения $\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{32}$ и система уравнений распадается на две системы уравнений - для симметричных колебаний и обратно симметричных колебаний:

$$\begin{cases} (\delta_{11} - \frac{1}{0,5m_1\omega^2}) \cdot J_1 + \delta_{13} \cdot J_3 = 0, \\ \delta_{31} \cdot J_1 + (\delta_{33} - \frac{1}{m_2\omega^2} \cdot J_3) = 0. \end{cases}$$

$$\left\{ (\delta_{22} - \frac{1}{0,5m_1\omega^2} \cdot J_2) = 0. \right.$$

Соответствующие им вековые уравнения будут:

$$\begin{vmatrix} (\delta_{11} \cdot 0,5m_1 - \frac{1}{\omega^2}) & \delta_{12}m_2 \\ \delta_{31} \cdot 0,5m_1 & (\delta_{33}m_2 - \frac{1}{\omega^2}) \end{vmatrix} = 0.$$

$$(\delta_{22} \cdot m_2 - \frac{1}{\omega^2}) = 0.$$

Для вынужденных колебаний с частотой θ получим уравнения

$$\begin{cases} (\delta_{11} - \frac{1}{0,5m_1\theta^2}) \cdot J_1 + \delta_{12} \cdot J_2 + \delta_{13} \cdot J_3 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{21} \cdot J_1 + (\delta_{22} - \frac{1}{0,5m_1\theta^2} \cdot J_2) + \delta_{23} \cdot J_3 + \Delta_{2p} = 0, \\ \delta_{31} \cdot J_1 + \delta_{32} \cdot J_2 + (\delta_{33} - \frac{1}{m_2\theta^2} \cdot J_3) + \Delta_{3p} = 0. \end{cases}$$

Симметричные и обратно симметричные колебания являются обособленными друг от друга. Из этого вытекают два положения для вынужденных колебаний.

1. В симметричной раме при воздействии симметричной вибрационной нагрузки обратно симметричные силы инерции равны нулю; и наоборот, при воздействии обратно симметричной нагрузки симметричные неизвестные силы инерции равны нулю.

2. В симметричной раме при действии вибрационной нагрузки с частотой θ , приближающейся к одной из частот, соответствующей симметричной форме колебаний, в стадии резонанса будут лишь симметричные силы инерции, их значение

будет приближаться к бесконечности, обратно симметричные силы инерции будут иметь конечные значения.

И наоборот, при действии на симметричную раму вибрационной нагрузки с частотой, приближающейся к одной из частот обратно симметричной формы колебаний, в стадии резонанса будут лишь обратно симметричные силы инерции, их значения будут приближаться к бесконечности, симметричные силы инерции будут иметь конечные значения.

При вынужденных колебаниях от нагрузки с частотой $\theta < \omega_c$ (где ω_c - первая частота симметричных колебаний) силы инерции J_1 должны иметь одинаковый знак с соответствующими амплитудными перемещениями Δ_{1P} .

При переходе от частот $\theta < \omega_{KC}$ к частоте $\theta > \omega_{KC}$ (где ω_{KC} - частота обратно симметричных колебаний) обратно симметричные силы инерции, как правило, изменяют знак на обратный; симметричные силы инерции сохраняют знак.

Аналогично, при переходе через первую частоту симметричных колебаний симметричные силы инерции, как правило, изменяют знак на обратный, обратно симметричные силы инерции сохраняют знак. Исключением являются случаи, когда симметричные или обратно симметричные формы колебаний являются разделившимися или почти разделившимися. Это имеет место, когда смешанные коэффициенты перемещений δ_{ij} равны нулю или существенно меньше главных перемещений δ_{ii} . Так, например, если в вековом уравнении симметричных колебаний $\delta_{13} \ll \delta_{11}$ и $\delta_{13} \ll \delta_{33}$, то частоты собственных колебаний ω_1 и ω_2 , полученные из уравнения:

$$(\delta_{11} \cdot 0,5m_1 - \frac{1}{\omega^2})(\delta_{33} \cdot m_2 - \frac{1}{\omega^2}) - \delta_{13} \cdot m_2 \cdot \delta_{31} \cdot 0,5m_1 = 0,$$

вследствие малости δ_{13} почти не будут отличаться от соответственных частот, полученных из уравнений:

$$\delta_{11} \cdot 0,5m_1 - \frac{1}{\omega^2} = 0,$$

$$\delta_{33} \cdot m_2 - \frac{1}{\omega^2} = 0.$$

На основании вышеизложенного при прохождении через частоту, полученную из первого уравнения, изменит знак лишь сила инерции J_1 , сила J_3 знак не изменит; и наоборот, при прохождении через частоту, полученную из второго уравнения, изменит знак лишь сила инерции J_3 , сила J_1 знак не изменит.

7. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы с учетом затухания

Если к системе с одной степенью свободы (рис. 21), приложена гармоническая возмущающая сила, то в дополнение к силам R , F и J в уравнение

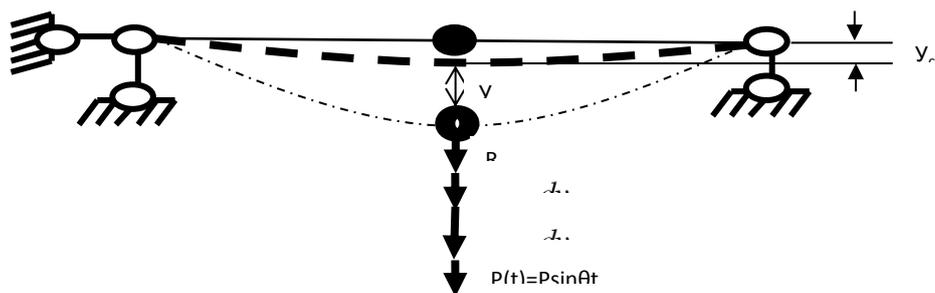


Рис.21

ДИ-

намического равновесия войдет и сила $P(t)$ и тогда вместо однородного дифференциального уравнения (12) мы получим неоднородное, т. е. уравнение с правой частью

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2n \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = \frac{P}{m} \sin \theta t, \quad (28)$$

Общий интеграл уравнения (28) представляет сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения, удовлетворяющего правой части уравнения (28):

$$y = y_0 + y_{\text{ч}}. \quad (29)$$

Общее решение было получено ранее:

$$y_0 = A_0 e^{-nt} \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

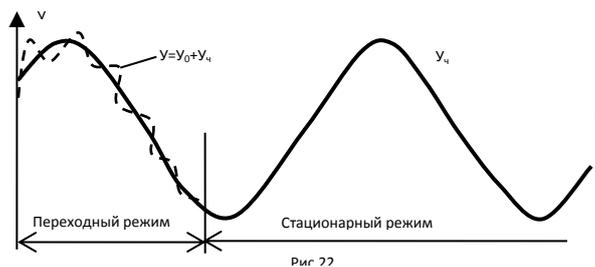
Оно выражает затухающие колебания с собственной частотой ω_0 , которые быстро затухают благодаря силам сопротивления и тогда устанавливаются вынужденные колебания с частотой θ .

Частное решение для гармонической возмущающей силы можно представить в виде:

$$y_{\text{ч}} = A_{\text{ч}} \sin(\theta t + \varphi_{\text{ч}}) = a_1 \sin \theta t + a_2 \cos \theta t, \quad (30)$$

где $a_1 = A_{\text{ч}} \cos \varphi_{\text{ч}}$, $a_2 = A_{\text{ч}} \sin \varphi_{\text{ч}}$.

На рис. 22 показан график решения (29). В начале колебаний имеет место переходный режим. По истечении некоторого времени собственные колебания практически затухают и система совершает установившиеся гармонические колебания с частотой возмущающей силы (стационарный режим).



Для определения постоянных $A_{\text{ч}}$ и $\varphi_{\text{ч}}$, подставим частное решение (30) в уравнение (28)

$$-a_1 \theta^2 \sin \theta t - a_2 \theta^2 \cos \theta t + 2n a_1 \theta \cos \theta t - 2n a_2 \theta \sin \theta t + \omega^2 a_1 \sin \theta t + \omega^2 a_2 \cos \theta t = \frac{P}{m} \sin \theta t.$$

Приравнявая коэффициенты при синусе и косинусе обеих частей этого равенства, приходим к системе уравнений относительно $A_{\text{ч}}$ и $\varphi_{\text{ч}}$.

$$\begin{cases} -a_1 \theta^2 - 2n \theta a_2 + \omega^2 a_1 = \frac{P}{m}, \\ -a_2 \theta^2 + 2n \theta a_1 + \omega^2 a_2 = 0. \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} -a_1 (\omega^2 - \theta^2) - 2n \theta a_2 = \frac{P}{m}, \\ 2n \theta a_1 + \omega^2 a_2 (\omega^2 - \theta^2) = 0. \end{cases}$$

Отсюда найдем

$$a_1 = \frac{\frac{P}{m} (\omega^2 - \theta^2)}{(\omega^2 - \theta^2) + (2n\theta)^2}, \quad a_2 = -\frac{\frac{P}{m} 2n\theta}{(\omega^2 - \theta^2) + (2n\theta)^2}.$$

Амплитуда вынужденных колебаний будет равна:

$$A_d = \frac{P}{m\omega^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-v^2)^2 + \left(\frac{2n v}{\omega}\right)^2}} = y_{cm} \mu. \quad (31)$$

Здесь $y_{ст}$ - статический прогиб от амплитуды динамической нагрузки, μ - динамический коэффициент. Он равен отношению наибольшего динамического прогиба к статическому, вызванному силой P и вычисляется по формуле:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-v^2)^2 + \left(\frac{2n v}{\omega}\right)^2}}. \quad (32)$$

Угол φ_d определяется по формуле:

$$\varphi_d = \text{arctg} \frac{-2n\theta}{\omega^2 - \theta^2}. \quad (33)$$

Графики динамического коэффициента μ для ряда значений коэффициента затухания n , называемые амплитудно-частотными характеристиками системы, изображены на рис 23.

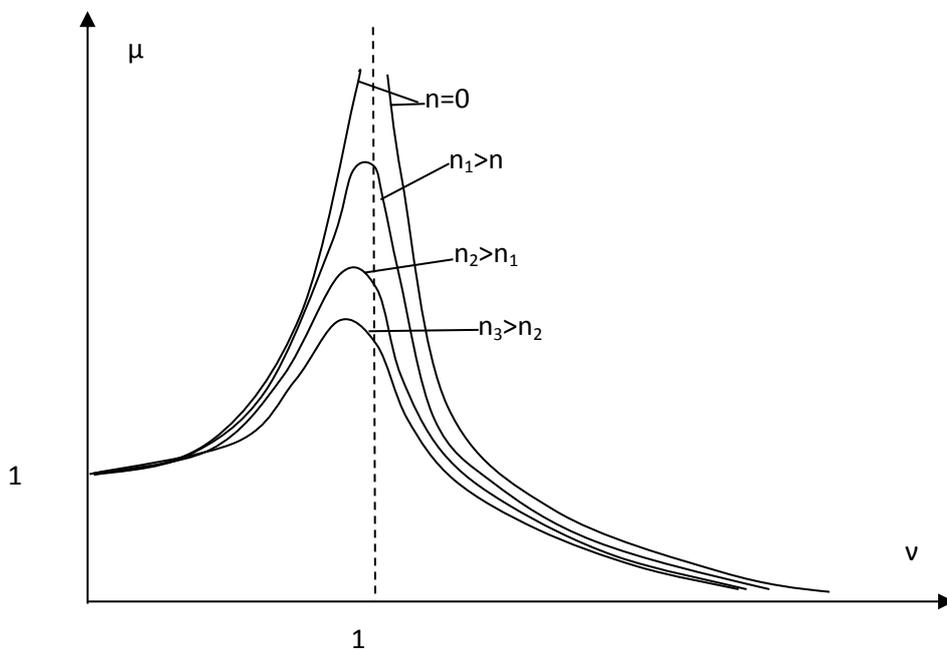


Рис. 23

Наибольшего значения динамический коэффициент достигает при резонансе. При учете затухания динамический коэффициент уже не стремится к бесконечности, и его максимальное значение будет сдвигаться влево от асимптоты $v=1$. В резонансной зоне учет сил сопротивления необходим. В то же время вне ее учет их мало сказывается на результатах.

Расчет стержневых систем на устойчивость

8. Понятие о потере устойчивости и критической нагрузке

Системы, применяемые в качестве строительных конструкций, под действием нагрузки должны находиться в состоянии устойчивого равновесия. Это означает, что если какие-либо случайные причины выведут систему из состояния равновесия, то после удаления этих причин система долж-

на вернуться в первоначальное положение

Обеспечение устойчивости строительных конструкций особенно важно потому, что самый процесс потери устойчивости происходит очень быстро и практически ведет к разрушению сооружения

В теории устойчивости рассматриваются принципы и методы определения величин нагрузок, при которых системы переходят в неустойчивое состояние.

При заданной схеме сооружения и заданной схеме нагрузки устойчивость равновесного состояния зависит от величины нагрузки. В каждом отдельном случае можно найти ту нагрузку (или параметр, определяющий всю данную систему нагрузок), при которой первоначальная форма равновесия становится неустойчивой и возможно другое, качественно новое деформированное состояние, тоже являющееся состоянием равновесия. Выход системы из первоначального состояния равновесия называется потерей устойчивости, а нагрузка, при небольшом превышении которой возможно осуществление новой устойчивой формы равновесия (так называемое раздвоение, или бифуркация, форм равновесия), называется критической нагрузкой.

На рис. 24 а сплошными линиями показана первоначальная форма равновесия тонкого упругого стержня, жестко защемленного в основании при центральном сжатии, пунктиром - новая, изогнутая форма равновесия после потери устойчивости. Это - потеря устойчивости центрального сжатия.

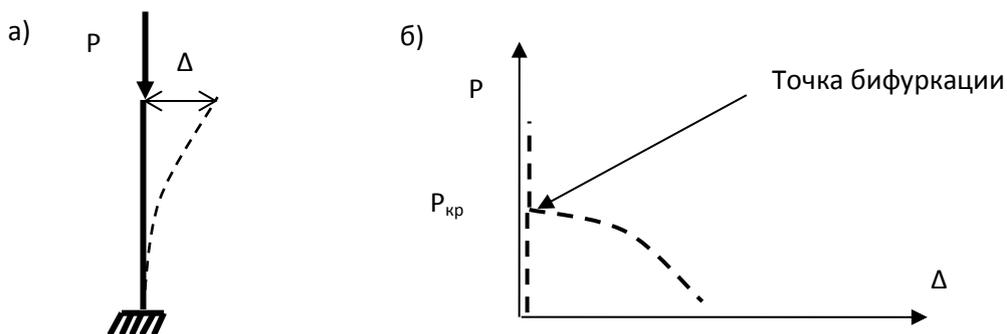


Рис. 24

Этот пример характерен тем, что в момент потери устойчивости появляется новый вид деформации, качественно отличный от первоначальных деформаций сооружения (первоначально сжатая стойка получила деформации изгиба). Принято потерю устойчивости, характеризуемую внезапным появлением качественно новых деформаций, называть **потерей устойчивости I-го рода (потеря устойчивости по Эйлеру)**. Именно к этому случаю и относится определение критической силы, данное выше. Точка, где происходит разветвление состояний равновесия называется точкой бифуркации (рис.56 б).

В инженерной практике весьма часто встречается и другой класс задач: на рис. 25 а в качестве примера изображены внецентренно сжатая

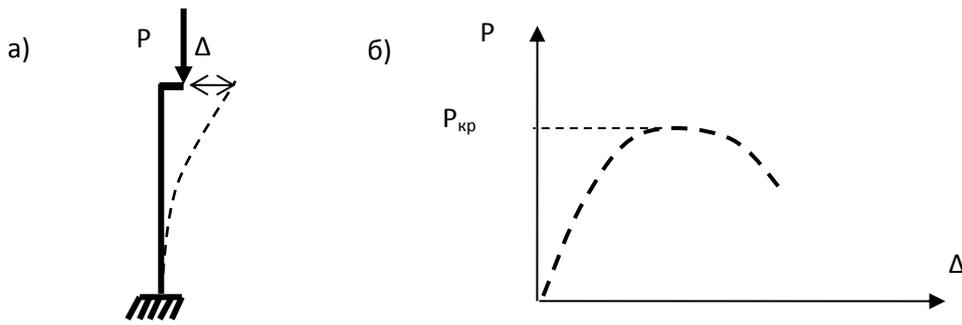


Рис. 25

стойка, которая с самого начала находится под воздействием продольных сил и изгибающих моментов. При малых нагрузках влияние продольных сил на деформации невелико и приращения перемещений почти пропорциональны приращениям нагрузок. С увеличением нагрузки влияние продольных сил возрастает и в какой-то момент пропорциональность между деформацией и нагрузкой резко нарушается, - деформации начинают расти во много раз быстрее, чем нагрузка. Может наступить такой момент, когда увеличения нагрузки не требуется для роста деформаций, они будут расти даже при уменьшении нагрузки; при этом никаких «разветвлений», состояния равновесия не будет - явление развивается все время в одном направлении и меняется только в количественном отношении.

Рост деформации при отсутствии приращения нагрузки может рассматриваться тоже как потеря устойчивости (так называемая **потеря устойчивости 2-го рода**), связанная с потерей несущей способности сооружения. Нагрузка, соответствующая началу деформации без приращения нагрузки, называется критической силой при потере устойчивости 2-го рода (рис.25 б).

9. Устойчивость 1-го рода, методы расчета

Назовем степенью свободы m системы число независимых геометрических параметров, определяющих возможные перемещения всех ее точек. Реальная упругая система (рис.26 а) всегда будет иметь степень свободы $m = \infty$; так как чтобы полностью определить

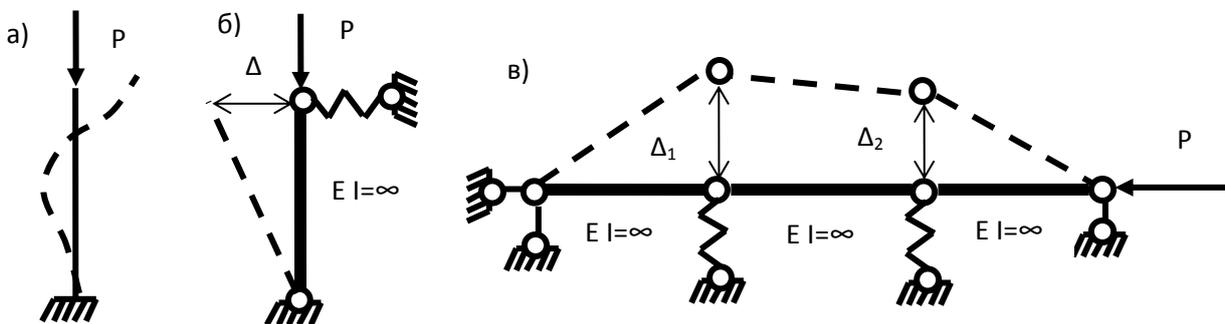


Рис.26

деформацию балки конечной жесткости надо задать прогибы во всех ее точках. Если бесконечно жесткая балка (рис. 26, б, в), опирается на упругие опоры, то число независимых геометрических параметров, определяющих возможные перемещения всех ее точек будет конечным. Для балки, пока-

занной на рис. 26б перемещения всех точек определяются одним параметром - перемещением опоры Δ ; степень свободы $m = 1$. Для системы (рис. 26, в) возможны два перемещения Δ_1 и Δ_2 поэтому степень свободы равна двум.

Система будет иметь столько возможных форм потерь устойчивости и соответствующих им критических сил, сколько она имеет степеней свободы; но, естественно, из всех форм практически вероятна одна, соответствующая минимальной критической силе.

Для расчета на устойчивость можно использовать методы: **динамический, статический и энергетический**.

Общим методом определения критических нагрузок является **динамический метод** исследования движения системы вблизи положения равновесия. Если вертикальный бесконечно жесткий стержень, шарнирно опирающийся на землю, находится в равновесии под действием центрально приложенной силы P (рис. 27) и при небольшом отклонении не может вернуться в исходное положение, то равновесное состояние является неустойчивым.

Если стержень после отклонения, поколебавшись вокруг вертикального положения, вернется в первоначальное положение, то его равновесие является устойчивым.

Определим критическую нагрузку для прямолинейного бесконечно жесткого стержня шарнирно опертого внизу и имеющего упругую опору внизу (рис. 27а). В динамическом методе записывается динамическое уравнение колебаний системы около положения равновесия. Сосредоточенная сила P представляется массой равной величине силы деленной на ускорение свободного падения $m=P/g$ (рис. 27б).

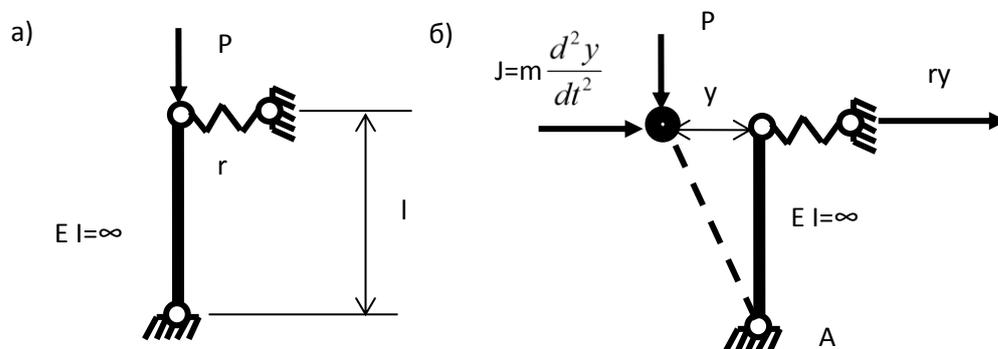


Рис. 27

Запишем сумму моментов всех сил относительно точки А:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} l + ryl - Py = 0$$

После преобразования дифференциальное уравнение колебаний будет иметь вид:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{rl - P}{ml} y = 0$$

Решение этого дифференциального уравнения будет зависеть от коэффициента $\frac{rl - P}{ml}$. Возможны три случая:

$\frac{rl - P}{ml} > 0$; тогда введя обозначение $\frac{rl - P}{ml} = \omega^2$ получим дифференциальное уравнение свободных колебаний решение которого равно $y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$. Если учесть затухание, то при $t \rightarrow \infty$ перемещение будет стремиться к нулю. Следовательно когда $P < rl$ система будет в устойчивом состоянии.

$\frac{rl - P}{ml} < 0$; тогда введя обозначение $\frac{rl - P}{ml} = -k^2$ получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - k^2 y = 0.$$

Решение этого уравнения $y = C_1 \text{sh} kt + C_2 \text{ch} kt$ при $t \rightarrow \infty$ будет стремиться к бесконечности. Следовательно когда $P > rl$ система находится в неустойчивом состоянии.

В последнем случае когда $\frac{rl - P}{ml} = 0$ решение дифференциального уравнения $\frac{d^2 y}{dt^2} = 0$. будет $y = C_1 + C_2 t$. Это состояние безразличного равновесия является границей между устойчивым и неустойчивым состояниями. То есть критическая сила равна $P_{кр} = rl$

Сущность **статического метода** заключается в следующем: поскольку система (рис.28а) при нагрузке, равной $P_{кр}$, потеряла устойчивость и перешла в новое деформированное состояние (рис. 28б); требуется определить ту нагрузку ($P_{кр}$), при которой это новое состояние

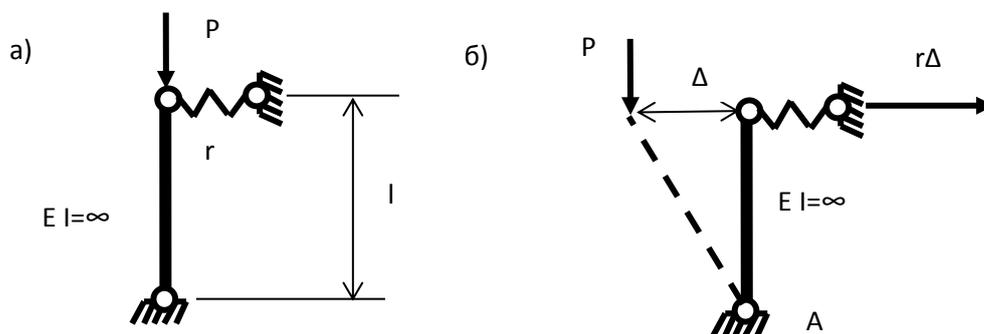


Рис. 28

будет состоянием равновесия.

Для нового равновесного состояния стойки(рис.28 б) запишем сумму моментов всех сил относительно точки А:

$$r\Delta l - P\Delta = 0$$

Перемещение Δ не равно нулю и поэтому его можно сократить. Из полученного уравнения получаем значение критической силы $P_{кр} = rl$.

Энергетический метод основан на применение принципа возможных перемещений: поскольку деформированное состояние есть состояние равновесия, критическая нагрузка определяется путем приравнивания нулю суммарной работы внешних и внутренних сил на малых возможных перемещениях из деформированного состояния в

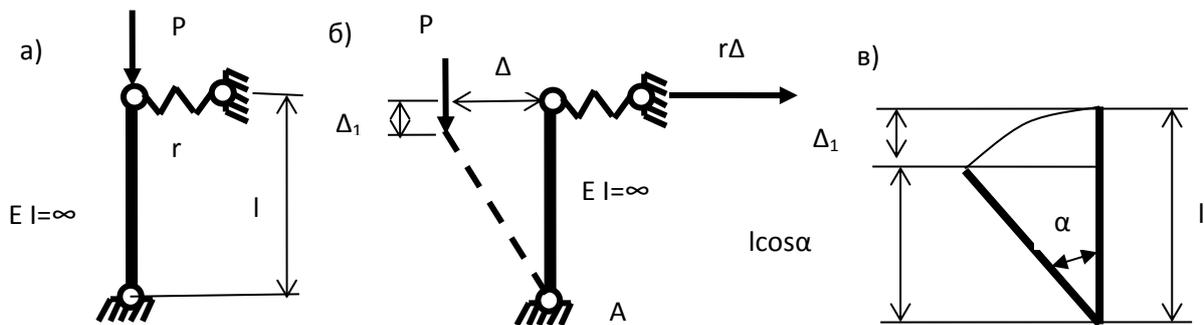


Рис. 29

исходное. При этом работа внешних сил будет отрицательна $A = - P\Delta_1$ (рис.29б). Вертикальное перемещение жесткого стержня будет зависеть от угла поворота α (рис. 29в):

$$\Delta_1 = l - l \cos \alpha = l(1 - \cos \alpha) = l \frac{\alpha^2}{2} \approx l \alpha^2 / 2$$

В отличие от внешней силы P , которая остается постоянной при перемещении из деформированного состояния в исходное, реакция $r\Delta$ уменьшается до нуля поэтому работа внутренних сил равна половине произведения реакции на перемещение: $W = r\Delta^2/2$

Записав уравнение

$$A + W = 0, \quad - P l \alpha^2 / 2 + r \Delta^2 / 2 = 0$$

и решив его относительно P , учитывая, что $\Delta \approx l\alpha$ получим критическую силу

$$P_{кр} = rl$$

Пример 4. Определить критическую нагрузку для системы, показанной на рис.30а статическим методом.

Бесконечно жесткую стойку можно рассматривать как упруго опертую внизу (рис.30б). Жесткость r упругой опоры будет равна

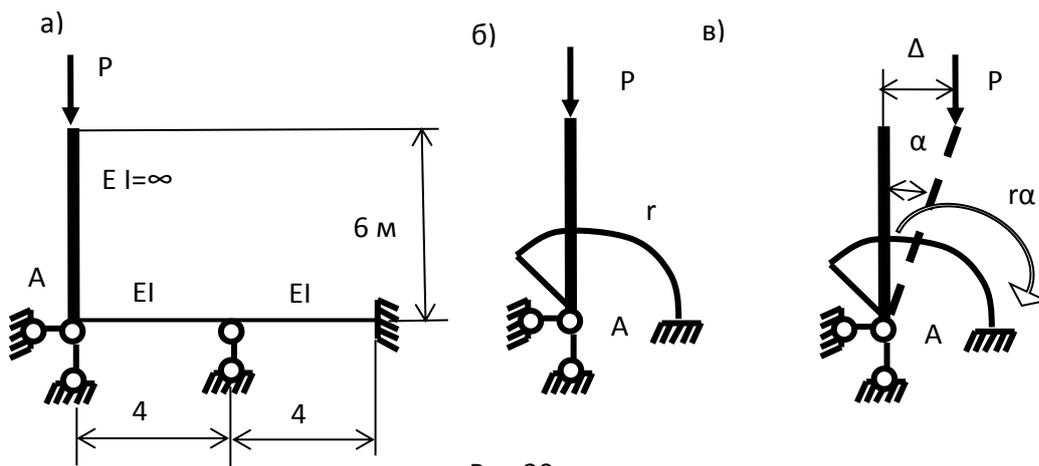


Рис.30

реак-

тивному моменту возникающему при повороте точки A на единицу (рис. 30в). При потере устойчивости стержень поворачивается вокруг точки A на угол α и в упругой опоре возникает реакция $r\alpha$. Запишем сумму моментов всех сил относительно точки A :

$$P\Delta - r\alpha = 0$$

Горизонтальное перемещение точки приложения силы равняется

произведению угла поворота на высоту стержня $\Delta = \alpha b$. Учитывая это получим критическую силу $P_{кр} = r/b$. Для определения жесткости упругой опоры α необходимо рассмотреть неразрезную балку (рис.31а), В точке А надо ввести заделку и повернуть ее на единичный угол. Реакция, которая возникнет в этой заделке, будет равна жесткости упругой заделки α

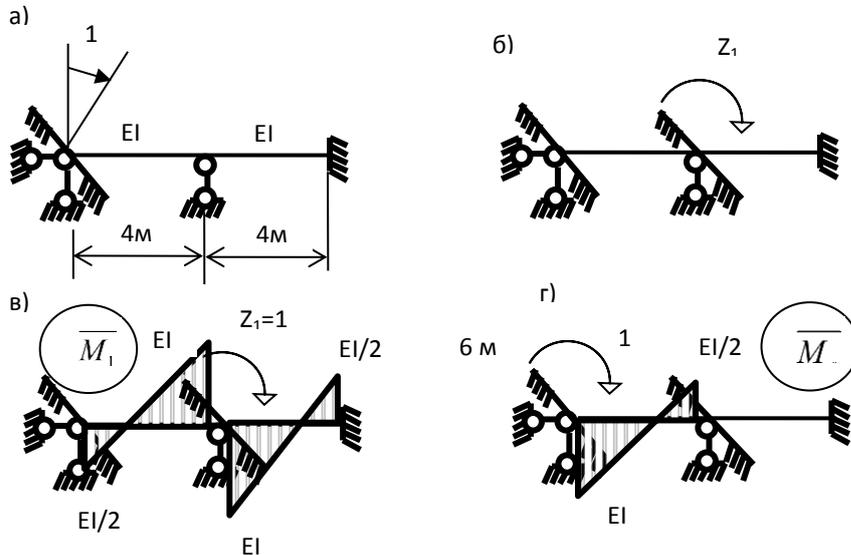


Рис. 31

Полученная неразрезная балка будет статически неопределимая и проще всего её решить методом перемещений. Основная система образуется из заданной путем введения заделки в жесткий узел (рис. 31б). Для определения перемещения Z_1 запишем каноническое уравнение метода перемещений:

$$r_{11} Z_1 + R_{1C} = 0$$

Единичная эпюра изгибающих моментов, построенная в основной системе от действия единичного неизвестного $Z_1=1$, показана на рис. 31б. Грузовая эпюра \overline{M}_c строится от единичного поворота точки А (рис. 31г).

Реактивный момент r_{11} равен сумме моментов в жестком узле эпюры \overline{M}_1 , в котором находится введенная связь (рис. 32а), т.е. $r_{11} = EI + EI = 2EI$.

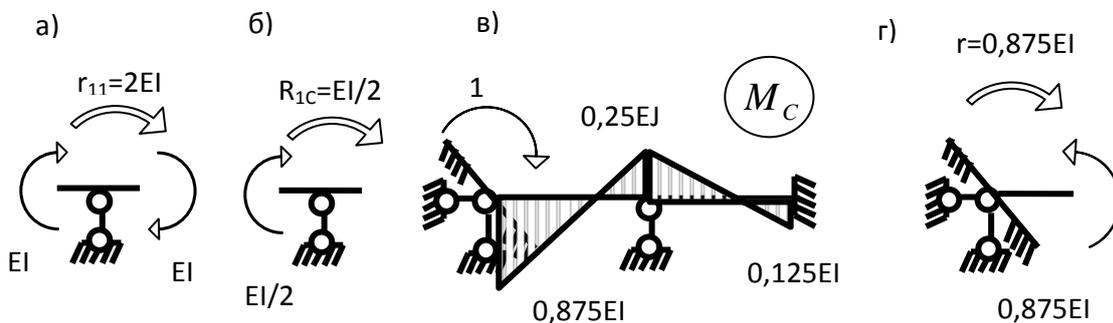


Рис.32

Аналогично, вырезая узел из эпюры \overline{M}_c (рис.32б), определяем реактивный момент $R_{1C} = EI/2$.

Подставив вместо r_{11} и R_{1C} их численные значения в каноническое урав-

нение, получим:

$$2EI Z_1 + EI/2 = 0; \quad Z_1 = -0,25$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов $M_c = \bar{M}_1 \cdot Z_1 + \bar{M}_c$ показана на рис 64 в.

Вырезаем узел в этой эпюре и находим (рис. 32г) $r = 0875EJ$. Подставляем найденную жесткость в формулу для критической силы

$$P_{кр} = r/6 = 0875EJ/6 = 0,14583 EJ.$$

10. Дифференциальное уравнение центрально сжатого стержня и его интеграл

Пусть первоначально прямолинейный стержень АВ под действием постоянной продольной силы N изогнулся и переместился, как показано

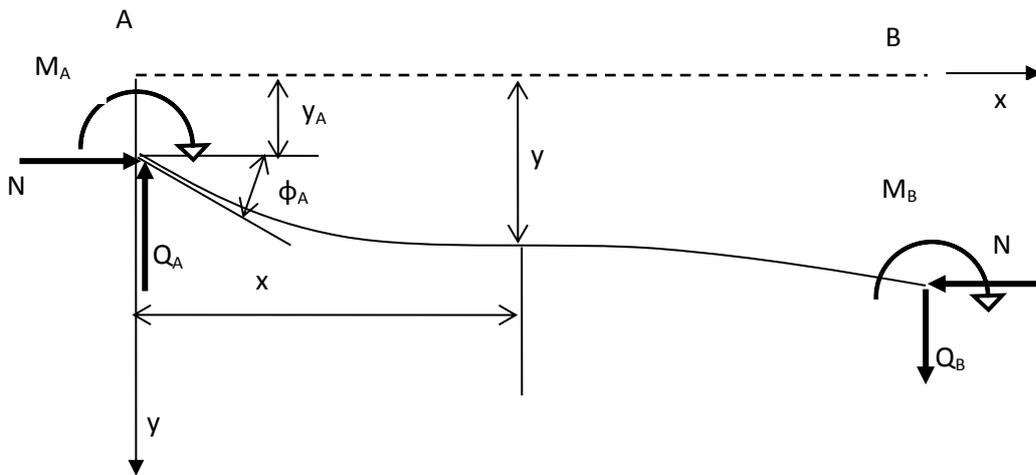


Рис.33

на рис. 33.

Изгибающий момент в произвольном сечении стержня будет равен

$$M_x = N(y - y_A) + M_A + Q_A \cdot x.$$

Дифференциальное уравнение изгиба $EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_x$ после подстановки значения изгибающего момента примет вид:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{N}{EJ} y = -\frac{1}{EJ} (M_A + Q_A x - N \cdot y_A).$$

Введя обозначение $n = \sqrt{\frac{N}{EJ}}$, получаем неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + n^2 y = -\frac{1}{EJ} (M_A + Q_A x - N \cdot y_A). \quad (34)$$

Решение этого уравнения:

$$y = y_A + \frac{\varphi_A}{n} \sin nx + \frac{M_A}{n^2 EJ} (\cos nx - 1) + \frac{Q_A}{n^3 EJ} (\sin nx - nx), \quad (35)$$

Путем последовательного дифференцирования получают формулы для углов поворота, моментов и поперечных сил в произвольном сечении центрально сжатого стержня:

$$\varphi = \varphi_A \cdot \cos nx - \frac{M_A}{nEJ} \sin nx + \frac{Q_A}{n^2 EJ} (\cos nx - 1), \quad (36)$$

$$M = \varphi_A \cdot nEJ \sin nx + M_A \cos nx + \frac{Q_A}{n} \sin nx. \quad (37)$$

$$Q = \varphi_A n^2 EY \cos nx - M_A n \sin nx + Q_A \cos nx \quad (38)$$

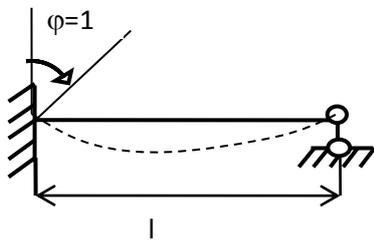
Пример 5. Рассмотрим балку с заделкой на одном конце и шарниром на другом, в которой при наличии постоянной продольной силы N произошел поворот левой заделки на угол, равный единице (рис. 34а).

Из четырех начальных параметров два известны: $y_A = 0$; $\varphi_A = 1$; остальные два определяются из условий:

При $x = l$ $y_l = 0$, $M_l = 0$.

Подставляя значение $x = l$ в уравнение (35) и в уравнение (37), получаем для определения M_A и Q_A систему двух уравнений

а)



б)

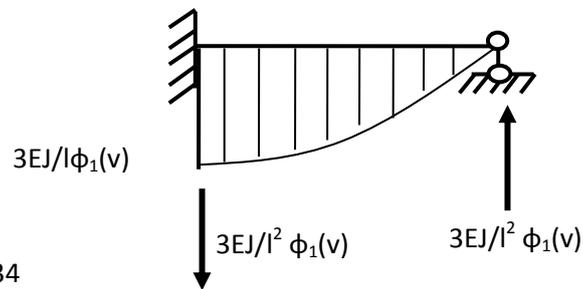


Рис. 34

$$\begin{cases} \frac{M_A}{n^2 EJ} (\cos nl - 1) + \frac{Q_A}{n^3 EJ} (\sin nl - nl) + \frac{1}{n} \sin nl = 0, \\ M_A \cos nl + \frac{Q_A}{n} \sin nl + 1 \cdot nEJ \sin nl = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем момент и поперечную силу в заделке

$$M_A = \frac{3EJ}{l} \cdot \frac{v^2 \operatorname{tg} v}{3(\operatorname{tg} v - v)} = \frac{3EJ}{l} \cdot \varphi_1(v).$$

$$Q_A = -\frac{3EJ}{l^2} \cdot \frac{v^2 \operatorname{tg} v}{3(\operatorname{tg} v - v)} = -\frac{3EJ}{l^2} \cdot \varphi_1(v).$$

Здесь

$$v = nl = l \sqrt{\frac{N}{EJ}}. \quad (39)$$

Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 34 б.

Аналогичным образом получены реакции в стержнях с различными граничными условиями от единичных перемещений (рис. 35).

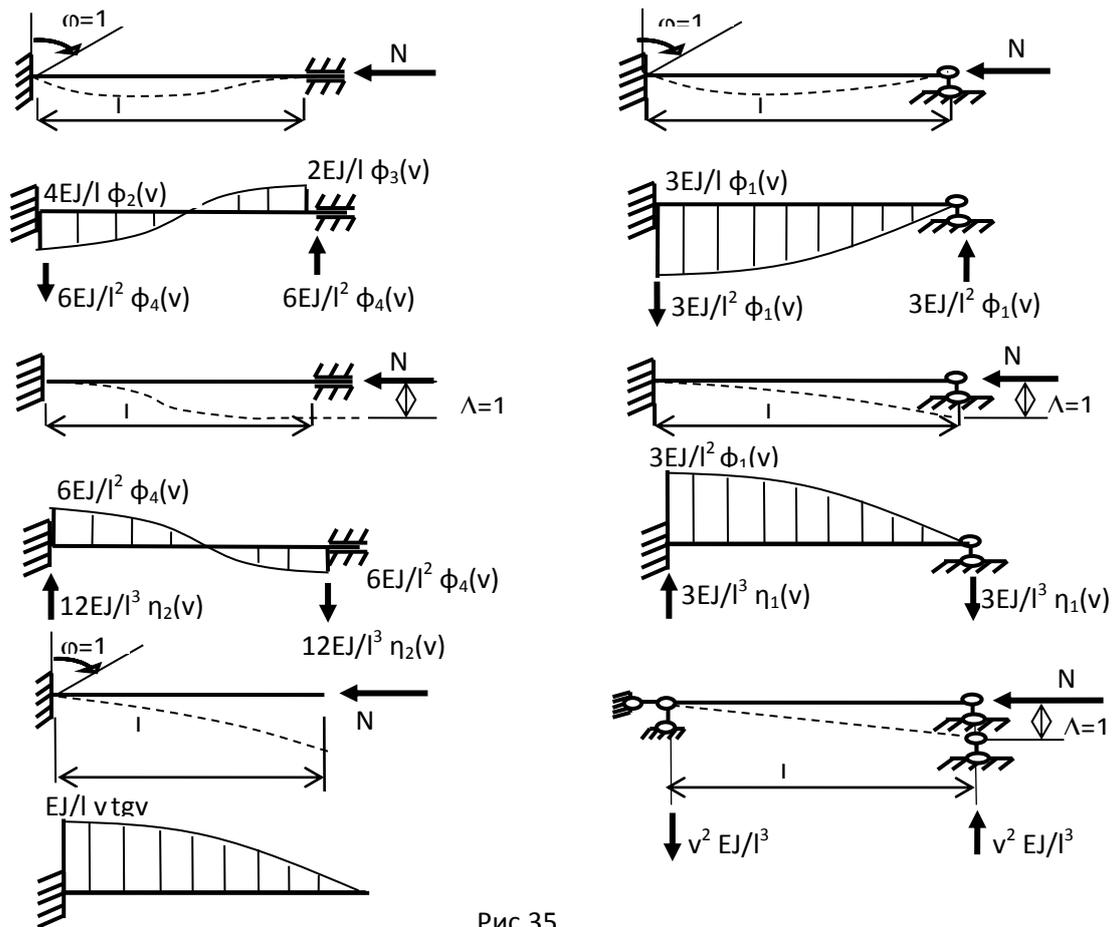


Рис.35

Значения функций $\varphi_1(v), \varphi_2(v), \varphi_3(v), \varphi_4(v), \eta_1(v), \eta_2(v)$. приведены в таблице

3.

Таблица 3

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
0	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
0,1	0,99933	0,99967	1,00017	0,99983	0,99600	0,99900
0,2	0,99733	0,99867	1,00067	0,99933	0,98400	0,99600
0,3	0,99398	0,99700	1,00150	0,99850	0,96398	0,99100
0,4	0,98928	0,99466	1,00268	0,99733	0,93595	0,98400
0,5	0,98321	0,99164	1,00420	0,99583	0,89988	0,97499
0,6	0,97575	0,98794	1,00607	0,99398	0,85575	0,96398
0,7	0,96687	0,98356	1,00829	0,99180	0,80353	0,95097
0,8	0,95653	0,97849	1,01088	0,98928	0,74320	0,93595

0,9	0,94470	0,97271	1,01385	0,98642	0,67470	0,91892
1	0,93134	0,96622	1,01720	0,98321	0,59801	0,89988
1,1	0,91639	0,95901	1,02095	0,97966	0,51305	0,87882
1,2	0,89978	0,95107	1,02511	0,97575	0,41978	0,85575
1,25	0,89083	0,94681	1,02736	0,97366	0,37000	0,84345
1,35	0,87161	0,93774	1,03218	0,96922	0,26411	0,81735
1,4	0,86131	0,93292	1,03476	0,96687	0,20798	0,80353
1,5	0,83928	0,92268	1,04029	0,96188	0,08928	0,77438
1,6	0,81523	0,91164	1,04631	0,95653	-0,03810	0,74320
1,7	0,78905	0,89978	1,05286	0,95081	-0,17428	0,70997
1,8	0,76059	0,88708	1,05996	0,94470	-0,31941	0,67470
1,9	0,72969	0,87350	1,06765	0,93822	-0,47365	0,63738
2	0,69614	0,85903	1,07596	0,93134	-0,63719	0,59801
2,1	0,65973	0,84362	1,08495	0,92406	-0,81027	0,55656
2,2	0,62019	0,82726	1,09465	0,91639	-0,99315	0,51305
2,3	0,57719	0,80988	1,10511	0,90829	-1,18614	0,46746
2,4	0,53038	0,79147	1,11640	0,89978	-1,38962	0,41978
2,5	0,47930	0,77196	1,12858	0,89083	-1,60403	0,37000
2,6	0,42341	0,75131	1,14172	0,88145	-1,82992	0,31812
2,7	0,36206	0,72946	1,15591	0,87161	-2,06794	0,26411
2,8	0,29444	0,70635	1,17123	0,86131	-2,31889	0,20798
2,9	0,21954	0,68191	1,18780	0,85054	-2,58380	0,14970
3	0,13608	0,65605	1,20573	0,83928	-2,86392	0,08928
3,1	0,04243	0,62869	1,22515	0,82751	-3,16090	0,02668
3,2	-0,06353	0,59974	1,24621	0,81523	-3,47687	-0,03810
3,3	-0,18466	0,56907	1,26910	0,80242	-3,81466	-0,10508
3,4	-0,32481	0,53657	1,29401	0,78905	-4,17814	-0,17428
3,5	-0,48939	0,50209	1,32118	0,77512	-4,57273	-0,24572

3,55	-0,58316	0,48405	1,33569	0,76793	-4,78399	-0,28228
3,65	-0,80018	0,44628	1,36674	0,75310	-5,24101	-0,35711
3,7	-0,92703	0,42650	1,38338	0,74546	-5,49036	-0,39538
3,8	-1,23028	0,38499	1,41909	0,72969	-6,04362	-0,47365
3,9	-1,62687	0,34068	1,45842	0,71326	-6,69687	-0,55424
4	-2,17265	0,29328	1,50187	0,69614	-7,50598	-0,63719
4,1	-2,98023	0,24244	1,55006	0,67831	-8,58356	-0,72252
4,15	-3,55322	0,21561	1,57614	0,66912	-9,29405	-0,76609
4,2	-4,31560	0,18775	1,60369	0,65973	-10,19560	-0,81027
4,3	-6,99473	0,12873	1,66364	0,64037	-13,15806	-0,90046
4,4	-15,32713	0,06480	1,73096	0,62019	-21,78046	-0,99315
4,5	227,92924	-0,00477	1,80698	0,59914	221,17924	-1,08836
4,6	14,66930	-0,08086	1,89330	0,57719	7,61596	-1,18614
4,7	7,81862	-0,16455	1,99197	0,55429	0,45529	-1,28654
4,8	5,40232	-0,25723	2,10559	0,53038	-2,27768	-1,38962
4,9	4,14630	-0,36067	2,23754	0,50540	-3,85703	-1,49543
5	3,36148	-0,47718	2,39226	0,47930	-4,97185	-1,60403
5,1	2,81297	-0,60986	2,57570	0,45200	-5,85703	-1,71550
5,2	2,39864	-0,76290	2,79604	0,42341	-6,61469	-1,82992
5,3	2,06681	-0,94221	3,06482	0,39347	-7,29653	-1,94737
5,4	1,78835	-1,15634	3,39886	0,36206	-7,93165	-2,06794
5,5	1,54548	-1,41816	3,82360	0,32909	-8,53785	-2,19174
5,6	1,32655	-1,74806	4,37945	0,29444	-9,12678	-2,31889
5,7	1,12346	-2,18035	5,13461	0,25797	-9,70654	-2,44953
5,8	0,93021	-2,77765	6,21392	0,21954	-10,28312	-2,58380
5,85	0,83577	-3,17354	6,94568	0,19953	-10,57173	-2,65234
5,95	0,64868	-4,30473	9,08295	0,15783	-11,15216	-2,79238
6	0,55509	-5,15938	10,72700	0,13608	-11,44491	-2,86392

прямолинейной (рис. 36б).

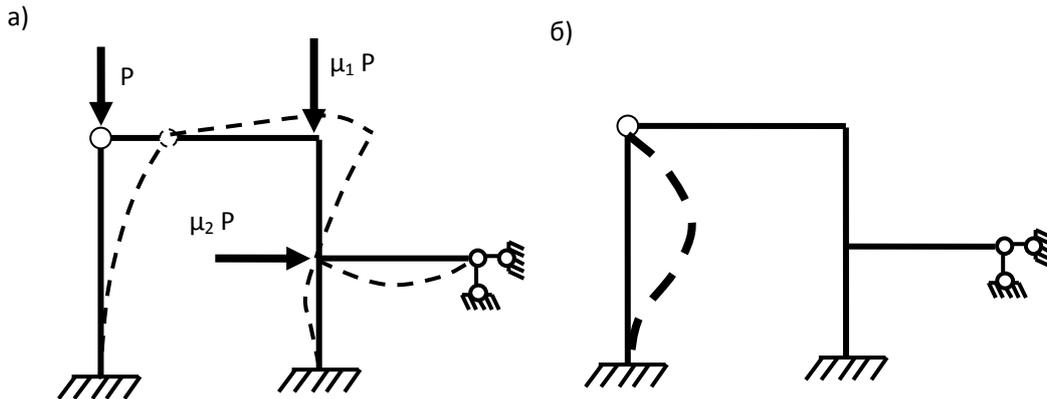


Рис. 36

В изогнутом равновесном состоянии $z_i \neq 0$, система же однородных линейных уравнений дает ненулевое решение для неизвестных только при равенстве нулю определителя, составленного из коэффициентов при неизвестных. Составляем определитель и приравниваем его к нулю.

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (41)$$

Получаем так называемое уравнение устойчивости, из которого и определяется критический параметр нагрузки

Пример 6.

Найти критическую нагрузку $P_{кр}$ для рамы показанной на рис. 37а.

Данная система имеет две степени кинематической неопределимости. Образует основную систему, введя связи препятствующие возможным угловому и линейному смещениям (рис 37б).

Параметр ν для стойки равен:

$$\nu = l \sqrt{\frac{N}{EJ}} = 4 \sqrt{\frac{P}{EJ}}.$$

Уравнение устойчивости будет:

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Строим единичную эпюру. M_1 . На ригеле нормальная

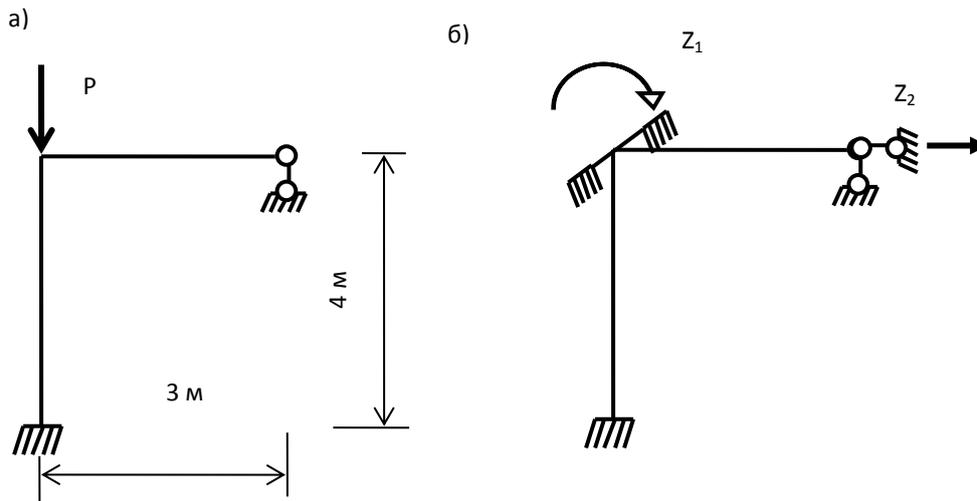


Рис. 37

сила равна нулю, поэтому эпюра моментов будет прямолинейная. На стойке надо учесть нормальную силу P и эпюра моментов будет криволинейная (рис. 38а).

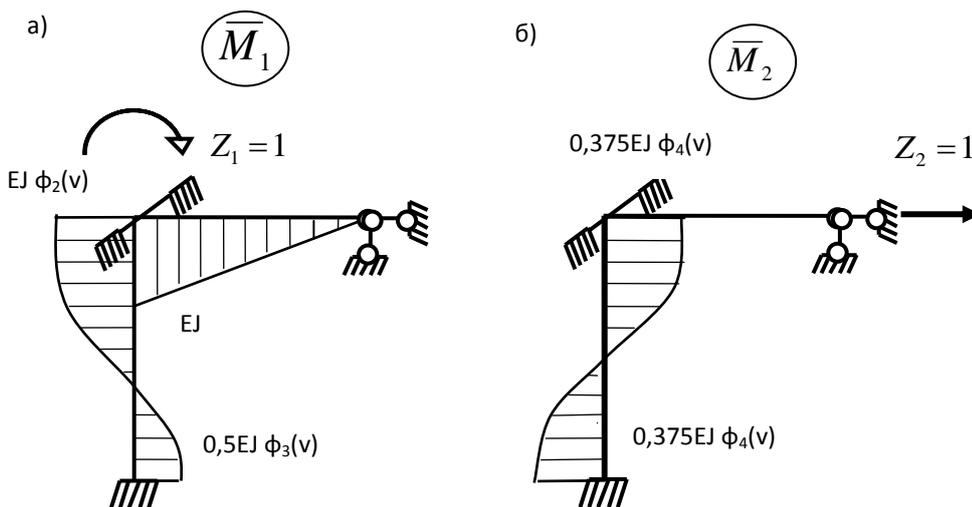


Рис. 38

Вторая единичная эпюра дана на рис.381б. Эпюра будет только на стойке, и с учетом продольной силы она будет криволинейной.

Для определения коэффициента r_{11} и r_{12} – реактивных моментов в наложенной связи вырежем узел и рассмотрим его равновесие. На рис.39а показан узел, вырезанный из единичной эпюры \bar{M}_1 , с действующими на него моментами со стороны отброшенных частей рамы и реактивным моментом в заземлении. Из равновесия узла найдем:

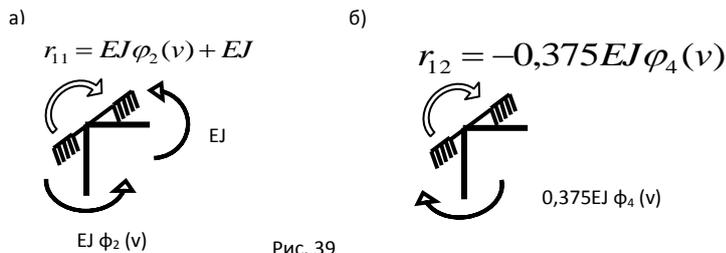


Рис. 39

$$r_{11} = EJ\varphi_2(v) + EJ.$$

На рис.39б показан узел, вырезанный из единичной эпюры \bar{M}_2 , с действующими на него моментами со стороны отброшенных частей рамы и реактивным моментом в защемлении. Из равновесия узла найдем:

$$r_{12} = -0,375EJ\varphi_4(v).$$

Для определения коэффициентов r_{21} и r_{22} – реактивных сил в наложенной связи вырежем часть рамы и рассмотрим равновесие ее верхней части на ось y . На рис.40а показана часть рамы, вырезанная из единичной эпюры \bar{M}_1 , с

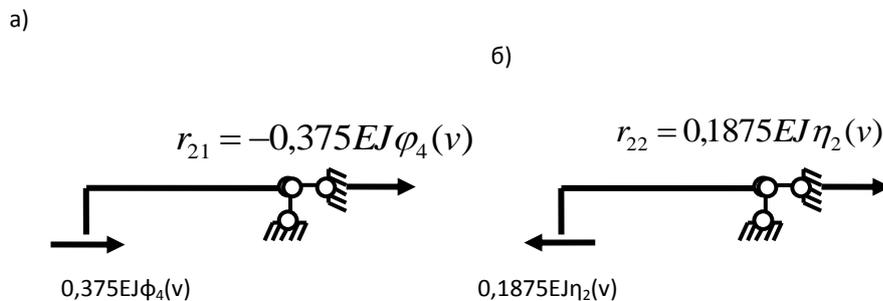


Рис. 40

действующими на нее поперечными силами со стороны отброшенных частей рамы и реактивной силой в опоре. Из проекции на ось x найдем:

$$r_{21} = -0,375EJ\varphi_4(v).$$

На рис.40б показана часть рамы, вырезанная из единичной эпюры \bar{M}_2 , с действующими на нее поперечными силами со стороны отброшенных частей рамы и реактивной силой в опоре. Из проекции на ось x найдем:

$$r_{22} = 0,1875EJ\eta_2(v).$$

Записываем уравнение устойчивости

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} EJ\varphi_2(v) + EJ & -0,375EJ\varphi_4(v) \\ -0,375EJ\varphi_4(v) & 0,1875EJ\eta_2(v) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель и сокращая на $(EJ)^2$, находим:

$$\Phi(v) = (\varphi_2(v) + 1) \cdot 0,1875\eta_2(v) - (0,375\varphi_4(v))^2 = 0.$$

Это трансцендентное уравнение, оно решается численным методом. Корень уравнения устойчивости v будет равен $= 2,570421$. $v = 4\sqrt{\frac{P}{EJ}}$.

Откуда критическая нагрузка будет:

$$P_{кр} = \frac{v^2 EJ}{4^2} = \frac{2,570421^2 EJ}{4^2} = 0,4129415EJ.$$

Деформационный расчет рам на устойчивость второго рода

Обычный расчет рамы производится по недеформированной схеме. При этом продольные силы в стержнях, не влияют на величины изгибающих моментов. В действительности, благодаря изгибу эти продольные силы вызывают дополнительные усилия и перемещения, которые при больших осевых силах и больших гибкостях стержней могут достигать значительной величины. Расчет с учетом этих дополнительных факторов ведется уже по деформированной схеме рамы и называется «деформационным расчетом».

Система канонических уравнений метода перемещений при деформационном расчете имеет тот же вид, что и при обычном расчете на прочность:

$$\begin{cases} r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + R_{1p} = 0, \\ r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + R_{2p} = 0. \end{cases}$$

Здесь r_{ij} , R_{ip} соответственно реакции в связи i от единичного смещения связи j и от нагрузки с учетом постоянных продольных сил в стержнях.

Основная трудность расчета состоит в том, что окончательные продольные силы в стержнях заранее неизвестны, поэтому расчет ведется методом последовательных приближений. Сначала проводят обычный статический расчет рамы без учета продольных сил, так называемое нулевое приближение. Далее рассчитывают раму с учетом найденных продольных сил (первое приближение). Можно для первого приближения принять сжимающие силы в стержнях, исходя из узловых нагрузок. Нормальные силы для второго приближения берут из результатов деформационного расчета первого приближения. Расчет ведется до тех пор, пока разница между продольными силами, полученными в i – ом и $(i + 1)$ – ом приближениях не станет меньше заданной точности.

Библиографический список

1. Анохин Н.Н. Динамический расчет стержневых систем с одной степенью свободы. -М.: 2006.-216с.
2. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем. -М.: АСВ, 1996.-541с.
3. Кадисов Г.М. Динамика и устойчивость сооружений. -М.: АСВ, 2007.-269с.
4. Масленников А.М. Основы динамики и устойчивости стержневых систем.- М.:АСВ,2000.-204с..
5. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. -М.: Лань, 2008. - 656с.
6. Александров А.В., Потапов В.Д., Зылев В.Б. Строительная механика. Динамика и устойчивость упругих систем. -М.: УМО МО РФ, 2008. -384с.

Оглавление

Основы динамики стержневых систем	4
1. Общие сведения о динамических расчетах конструкций	4
2. Свободные колебания системы с одной степенью свободы без учета затухания.....	5
3. Свободные колебания системы с конечным числом степеней свободы.....	5
4. Свободные колебания системы с одной степенью свободы с учетом затухания	5
5. Энергетический способ определения частоты собственных колебаний системы.....	14
6. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы без учета затухания.....	16
7. Вынужденные колебания системы с конечным числом степеней свободы.....	18
8. Использование симметрии при динамическом расчете рам	21
9. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы с учетом затухания	224
Расчет стержневых систем на устойчивость.....	26
10. Понятие о потере устойчивости и критической нагрузке	26
11. Устойчивость 1-го рода, методы расчета	28
12. Дифференциальное уравнение центрально сжатого стержня и его интеграл.....	33
13. Расчет рам на устойчивость первого рода методом перемещений	38
14. Деформационный расчет рам на устойчивость второго рода.....	42